

$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador  $\phi^4$

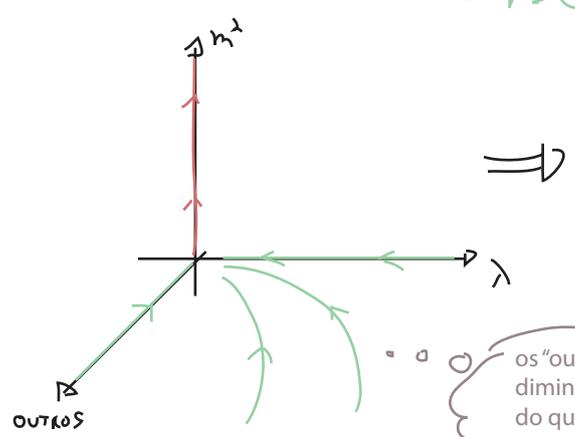
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-1} \mu^{d-4}$$

eq. 78.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\mu^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$   
 só corrige a massa

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

→  $\lambda'$  diminui lentamente conforme "integramos"



isso quer dizer que  $\lambda\phi^4$  acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de  $\lambda\phi^4$  sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que  $\lambda$

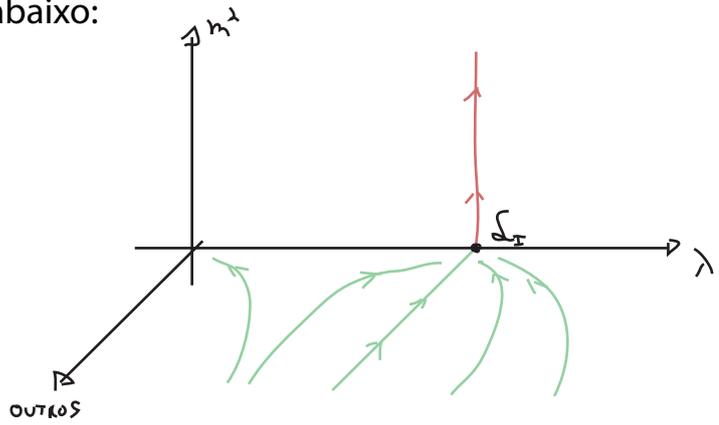
$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d < 4$

O operador  $\phi^4$  agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de  $\lambda$  vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem  $\lambda$  (da eq. 78.1). Para  $d < 4$  temos:

$$\lambda' = \left( \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \mu^{d-4})}{d-4} \mu^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \mu^{d-4}$

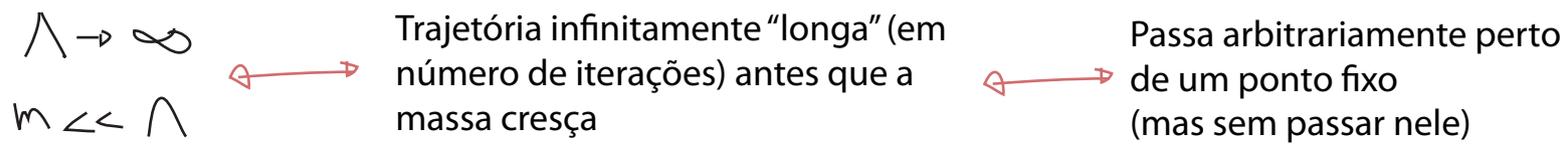
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto  $\lambda$  pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos  $d \rightarrow 4$ , e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de  $d = 4$  temos o diagrama abaixo:



## A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos  $\Lambda \rightarrow \infty$  e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os  $\delta$ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- ▶ toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ▶ ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de  $\Lambda$  e  $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização**. Vendo como os coeficientes dependem desta escala  $\mu$ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começemos com uma teoria escalar sem massa (o termo  $m^2$  renormalizado é exatamente zero). As condições para teorias massivas não servem mais (o  $\delta\lambda$  obtido das condições lá usadas tem singularidades para  $m^2 = 0$ ). Usaremos então uma escala arbitrária  $M$ :

$p^2 = -M^2$

$= 0$

$= 0$

ficando na região  $p^2 < 0$  temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para  $p^2 > 0$  é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

$= -i\lambda$

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

Com estas novas condições:

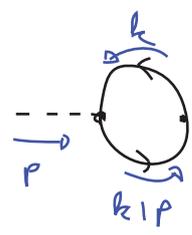
$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, temos:



$$= \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}}$$

$\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$

$$m_f^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$



$$\text{1PI} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)p^2]^{1-d/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta z - \delta m)$$

$$\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{LN}(-p^2) + \text{LN}(4\pi) \right] \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-d/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de  $p^2$  portanto será cancelada por algo equivalente em  $\delta m$ .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Loc}(4\pi) - \gamma + 1 - \text{LN}(-p^2) \right) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para  $\delta m$ , apenas para  $\delta z$ .

$$\rightarrow -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{LN}\left(\frac{1}{-p^2}\right) + C \right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para  $\delta z$  e  $\delta m$ , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left( \frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left( \text{LN} \left( \frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para  $\lambda\phi^4$ , mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em  $\delta Z$ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em  $d = 4$ ) as divergências de  $\delta Z$  (e  $\delta\lambda$ ) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização,  $M'$  para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de  $m_0$ ,  $\lambda_0$  e  $\Lambda$ .  $M$  só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{matrix} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \phi \\ M \end{matrix} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em  $M$ ?

$$M \rightarrow M + \delta M$$

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda$$

$$\phi \rightarrow (1 + \delta\eta) \phi \quad \dots \quad 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} \phi = Z^{-1/2} \phi_0 \\ \downarrow \\ \phi = Z^{-1/2} (1 + \delta\eta) \phi_0 \end{matrix} \right.$$

Na função de Green só importa a mudança em  $Z$  (já que  $G_0$  só depende dos parâmetros núm):

$$Z^{-1/2} \rightarrow (1 + \delta\eta) Z^{-1/2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n\delta\eta) Z^{-n/2}$$

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)}$$

Pensando em  $G$  como uma função de  $M$  e  $\lambda$ , esta transformação é dada por:

$$\boxed{dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}} \quad (\text{eq. 88.1})$$

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad \text{(eq. 89.1)}$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad \text{(eq. 89.2)}$$

Temos:

$$\left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre  $\beta$  e  $\gamma$ :

$\beta$  e  $\gamma$  são os mesmo para qualquer  $n$   
 são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa  
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 89.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em  $M$  será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função  $\gamma$  para cada campo e uma função  $\beta$  para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa,  $m_e = 0$ ) ( $n$  é o número de elétrons e  $m$  o de fótons):

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad \text{(eq. 89.4)}$$