Calculando as funções β e γ

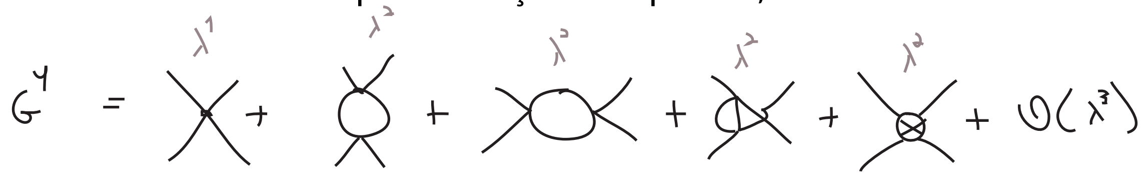
Mais uma vez, fiquemos na teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

sabemos que daqui só saem contribuições para δm

Como o cáculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre γ daqui: como não há correções a $G^{(2)}$ em ordem λ, só introduzimos a dependência em M e λ em $G^{(2)}$ em ordem λ^2. Assim a equação de CS para $G^{(2)}$ fica:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma(\lambda)\right]G^{(2)}(p) = 0 \qquad \gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:



$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + 4\gamma(\lambda)\right]G^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green:

$$G^4 = \left[-i\lambda + (-i\lambda)^2\left[iV(s) + iV(t) + iV(u)\right] - i\delta_\lambda\right]\cdot\underbrace{\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}}_{\text{propagadores da pernas externas}}$$

(que tem correções ~ λ^2 conforme vimos acima)

$$V(s) = \frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}\frac{1}{(k+p)^2-m^2} =$$
$$= \lim_{d\to 4}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dy\frac{1}{[m^2-y(1-y)\underbrace{p^2}_{s}]^{2-d/2}}\right\} =$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dy\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\ln[4\pi]-\ln[m^2-y(1-y)s]\right)\right\}$$

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a λ se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\, \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\left(x(1-x)M^2\right)^{2-d/2}}$$

$d \to 4$: $$\delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2}\Big[\frac{1}{2-\frac{d}{2}} - \ln(M^2) + \underbrace{\dots}_{\text{indep de M e finito}}\Big]$$

Temos então:

$$M\frac{d}{dM}G^{(4)} \underset{O(\lambda^2)}{=} \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}$$

(vem tudo de δ_λ)

$$\frac{d}{d\lambda}G^{(4)} = \left(-i + O(\lambda)\right)\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}$$

$\delta_\lambda \sim O(\lambda^2)$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{O(\lambda^2)}\right]G^{(4)} = 0$$

$$\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod\frac{i}{p_i^2} + \beta(\lambda)\left(-i + O(\lambda)\right)\prod\frac{i}{p_i^2} + \overbrace{4\gamma(\lambda)G^{(4)}}^{O(\lambda^3)} = 0$$

$\beta(\lambda)$ tem que ter no mínimo de ordem λ^2

$\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$

$(\lambda^0) \Rightarrow \boxed{-iA = 0}$

$(\lambda^1) \Rightarrow A - iB = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i}{(4\pi)^2} - iC = 0 \quad \boxed{C = \frac{3}{(4\pi)^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + O(\lambda^3)} \quad \text{(eq. 91.1)}$$

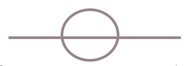
Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função γ:

$$\left[M\frac{d}{dM} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{O(\lambda^2)}\frac{d}{d\lambda} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{O(\lambda^2)}\right]\underbrace{G^{(2)}}_{A + B\lambda^2 + f_2(M)\lambda^2 + O(\lambda^3)} = 0$$

$$\beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda}G^{(2)} \sim O(\lambda^3)$$

$$(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M\frac{df_2(M)}{dM} + 2\gamma(\lambda)A = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2A}M\frac{df_2(M)}{dM}} \quad \text{(eq. 91.2)}$$

que pode ser obtido calculando



De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{———} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{——}\otimes\text{——} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}\left[\cancel{-i}\,\cancel{p^2}A\,\underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)}_{\text{divergências em } \delta Z \text{ são Logs}} + \text{termos finitos}\right]\frac{\cancel{i}}{\cancel{p^2}} + \frac{i}{p^2}\left(i p^2 \delta z\right)\frac{i}{p^2} + \dots$$

$$\frac{\partial G^{(2)}}{\partial M} = -\frac{i}{p^2}\frac{\partial}{\partial M}\delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \quad \begin{cases} G \sim \underline{\underline{\text{CONST.}}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \dfrac{\partial G}{\partial \lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{cases}$$

$$\Bigg[M\frac{\partial}{\partial M}G^{(2)} + \underbrace{\underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda}G^{(2)}}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})}}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} + \underbrace{\underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{G^{(2)}}_{\text{CONST.}+\mathcal{O}(\lambda^n)}}_{\mathcal{O}(\lambda)}\Bigg] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre de ordem superior a que envolve γ

$$-\frac{i}{p^2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z + 2\gamma(\lambda)\frac{i}{p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z} \qquad \text{(eq. 92.1)}$$

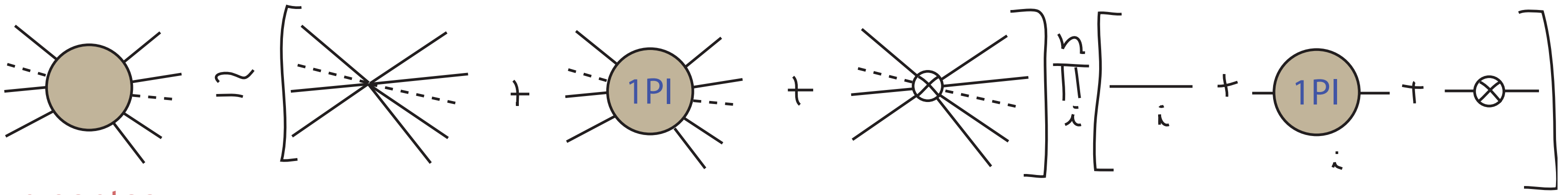
Se lembrarmos que δz tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala $-p^2 = M$, concluímos que:

$$\left\{\frac{i}{p^2}\left[A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)\right] + \frac{i}{p^2}\left(i p^2\delta z\right)\frac{i}{p^2}\right\}_{p^2=-M^2} = 0$$

$$\delta z = A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}M\cdot A\cdot\left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{-A}$$

coeficiente do logaritmo divergente
que contribuí para δz
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β. Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:



n pontos

$$\frac{i}{p_i^2} + \frac{i}{p_i^2}\left[A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right)\right] - \frac{i}{p_i^2}\delta z_i$$

$P(M)$

$$G^{(n)} \simeq \left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left[-ig - iB\ln\left[\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right] - i\delta_g - ig\sum_i^n\left(A_i\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right) - \delta z_i\right)\right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs)

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo ~ $-M^2$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(g)\frac{d}{dg} + n\gamma(g)\right]G^{(n)}(P) = 0$$

$$\boxed{n\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i}$$

$$\left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left\{M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) + \beta(g)\underbrace{\frac{dG^{(n)}}{dg}}_{\left[-i+\mathcal{O}(g^{\geq 1})\right]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i\,\underbrace{G^{(n)}}_{-ig+\mathcal{O}(g^{\geq 2})}\right\} = 0$$

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a δ_g ou δz_i, mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que δ_g ou $g\,\delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar <u>estes termos</u>

$$M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) - i\beta(g) - ig\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i = 0$$

$$\boxed{\beta(g) = M\frac{d}{dM}\left(-\delta_g + \frac{1}{2}g\sum_i^n \delta z_i\right)} \quad \text{(eq. 93.1)}$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$$\delta_g = -B\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \underbrace{\ldots}$$ as partes finitas independem de M

$$\boxed{\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i}$$ (eq. 94.1)

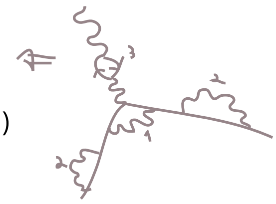
Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logarítmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\boxed{\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_2}$$ (eq. 94.2)

$$\boxed{\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_3}$$ (eq. 94.3)

$$\boxed{\beta(e) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3\right)}$$ (eq. 94.4)



Se modificarmos os δ's calculados na seção 10.3 do Peskin (eqs. 10.43, 10.44) para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3} \mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M\left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right)\right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = \cancel{M}\frac{e}{\cancel{2}}\left[\cancel{-}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{\cancel{M}}\right)\right]\frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge, δ_3 e β são ivariantes (ligados à polarização do vácuo).

O significado de γ e β

Vamos tentar entender γ e β, escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$\lambda\phi^4$: $\quad \phi(p) = Z(m)^{-1/2}\,\phi_0(p)$

$$m \to m+\delta m \Rightarrow \phi \to \phi + \delta\eta\,\phi$$

$$\phi' = (1+\delta\eta)\phi \quad \left\{\begin{array}{l}\phi' = Z(m+\delta m)^{-1/2}\phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2}\phi_0\end{array}\right\} \Rightarrow 1+\delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}{Z(m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de γ (eq 89.2) temos:

$$\gamma = -\frac{m}{\delta m}\delta\eta = -\frac{m}{\delta m}\left(\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1\right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}}\Bigg(\underbrace{\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m}}_{\frac{\partial}{\partial m}Z^{-1/2}}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2}\frac{\partial}{\partial m}Z$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2}\frac{m}{Z}\frac{\partial Z}{\partial m}} \quad \text{(eq. 95.1)} \qquad \underset{Z = 1+\delta Z}{\sim} \quad \frac{1}{2}\, m\left(1-\delta_Z + O(\delta_Z^2)\right)\frac{\partial}{\partial m}\delta_Z$$

que reproduz o resultado em L.O. de 92.1

mostra a ligação entre γ e a mudança de Z

No caso de β, nossa definição original já era suficientemente clara (eq 89.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m}\delta\lambda \quad \left\{\begin{array}{l} m \to m+\delta m \\ \lambda(m+\delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\beta = m\frac{\partial}{\partial m}\lambda(m)} \quad \text{(eq. 95.2)}$$

, o que mostra que β nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$Dim\left[G^{(2)}\right] = Dim\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore \quad G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2}\, \underbrace{g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right)}_{Dim[g]=0} = -\frac{i}{k^2}\, g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

tem dimensão -2 e só depende de *p* e *M*

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \; \therefore \; k^2 = -p^2 > 0$$

número (e não um quadrivetor)

$$x \equiv \frac{k}{M}$$

$$\frac{d}{dM} f(x) = \frac{dx}{dM}\frac{\partial f(x)}{dx} = -\frac{k}{M^2}\frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k}\frac{df}{dM}$$

$$\frac{d}{dk} f(x) = \frac{dx}{dk}\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M}\frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = M\frac{df}{dk}$$

$$\frac{df}{dM} = -\frac{k}{M}\frac{df}{dk}$$

$$M\frac{d}{dM}G^{(2)} = -M\frac{i}{k^2}\left(\frac{d}{dM}g\right) = -\frac{i}{k^2}\left(-k\frac{d}{dk}g\right) = -k\left[-\frac{i}{k^2}\frac{d}{dk}g\right]$$

$$\frac{d}{dk}\left(-\frac{i}{k^2}g\right) = +\frac{2i}{k^3}g - \frac{i}{k^2}\frac{d}{dk}g$$

$$M\frac{d}{dM}G^{(2)} = -k\left[\frac{d}{dk}\underbrace{\left(-\frac{i}{k^2}g\right)}_{G^{(2)}} \underbrace{-\frac{2i}{k^3}g}_{+\frac{2}{k}G^{(2)}}\right] = -k\left[\frac{d}{dk}G^{(2)} + \frac{2}{k}G^{(2)}\right] = \left[-k\frac{d}{dk} - 2\right]G^{(2)}$$

CS: $$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma(\lambda)\right]G^{(2)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[k\frac{d}{dk} + 2 - \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - 2\gamma\right]G^{(2)} = 0}$$

(eq. 96.1)

Teoria livre: $\beta = \gamma = 0$ $\qquad k\frac{d}{dk}G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade v(x) (x é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade D(t,x) e cuja taxa de crescimento é ρ(x)