



a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

as bactérias são arrastadas

$$\frac{\partial D(t, x)}{\partial t} = -v(x) \frac{\partial D(t, x)}{\partial x} + \underbrace{P(x) D(t, x)}_{\text{crescimento}}$$

em um dado ponto x_0
 $x_- < x_0$
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. encolhe pois} \\ D[x_-] < D[x_0] \end{array} \right.$
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] > D[x_0] \end{array} \right.$

$$\hookrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

$$\left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0 \quad (\text{eq. 96.1})$$

$\text{Log}\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t$
 $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk \quad \frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$
 $\lambda \leftrightarrow v(x)$
 $-\beta(\lambda) \leftrightarrow P(x)$
 $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$
 $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

Suponha que conheçamos: $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em $(t_1 > 0, x_1)$ temos que olhar a história dele. Considere um elemento que está na posição x_1 em um tempo t_1 , podemos descobrir onde ele estava em $t = 0$, integrando sobre seu movimento para o passado, segundo a equação:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) \equiv -v(\bar{x}) \rightarrow \text{posição de um elemento de fluido indo na direção errada (-)}$$

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1 \rightarrow \text{este começa em } x_1$$

$$\bar{x}(t_1; x_1) \rightarrow \text{posição dele em } t = 0$$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era: $D_i(\bar{x}(t_1, x_1))$

E a densidade em (t_1, x_1) será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right] \quad (\text{eq. 98.1})$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:

$$\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$$

posição dele em $t = t'$

$$\left. \begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}' & \bar{x}(t') &= \bar{x}' \\ \bar{x}(0, x_1) &= x_1 & \bar{x}(t_1, x_1) &= \bar{x} \end{aligned} \right\}$$

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

↳ notação

Voltando a mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 98.1 temos:

$$\left. \begin{aligned} L_N(\frac{k}{M}) &\leftrightarrow t \\ \lambda &\leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k, \lambda) &\leftrightarrow P(t, x) \\ -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 &\leftrightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \leftrightarrow k=M \\ D_i(x) \leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{cases}$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \cdot \left[2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 98.2})$$

redefino $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}$

$\text{Exp} \left[-2 \int_M^k d[L_N(\frac{k'}{M})] \right] = \frac{M^2}{k^2}$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 98.3})$$

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos $t = 0$ para agora e $t = t_1$ para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como $k = M$). Note que a taxa de mudança é dada pela função β

\Rightarrow Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida G_1 é obtendo a função $G(2)$ em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 98.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{PERT.}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \iff G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{98.3}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} G^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda))$$

$$\therefore G^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \rightarrow G^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante P^2 e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^2}\right)^4 g\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[L_N \left(\frac{p'}{M} \right) \right] \gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\}$$

(eq. 104.1)

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda))$$

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda(M)) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) \quad (\text{eq. 100.2})$$

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. De uma forma geral, qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai depender de duas grandezas:

$\lambda \leftrightarrow$ Constante de acoplamento

$L_N \left(-\frac{p^2}{M^2} \right) \leftrightarrow$ Grandeza adimensional que mede a "distância" entre p e M onde $\lambda = \bar{\lambda}(M)$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que λ seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros (λ e o logaritmo de p) em uma função do acoplamento (G_i) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência M. Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala M) vemos que $G_i^{(n)} = G^{(n)}$, mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 98.3 e 100.1 nos dizem é que devemos substituir λ por um acoplamento mais apropriado para aquela escala: $\bar{\lambda}$, o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 100.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a $\bar{\lambda}$.

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança destas vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 98.3 e 4 para 100.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter $\bar{\lambda}$ no caso da teoria $\lambda\phi^4$

(91.1) $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})}$$

(eq. 101.1)

Note que, expandindo em λ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M}) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 85 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função β positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em λ , temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln(\frac{k}{M}) + C^2 \lambda^3 \ln^2(\frac{k}{M}) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left(\frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para k muito longe de M . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 101.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento. Desta forma, qualquer problema que possa vir do tamanho dos logs será traduzido no tamanho do acoplamento efetivo, e assim só temos que nos preocupar se este parâmetro é pequeno.

Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 88 e 89), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável, sua normalização é fixada e portanto não temos a função γ (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

$Dim = -2$

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 96 e trocar a derivada em M por derivadas em q

$$\left[q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 96.1) $\Rightarrow \left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) E \times r \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[L_N \left(\frac{k'}{M} \right) \right] \Phi \left[\bar{\lambda}(k'; \lambda) \right] \right\} \quad (\text{eq. 202.3})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r))$$

(eq. 102.1)

$$\hookrightarrow \bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[\text{Log} \left(\frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_1(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função β da QED (pg. 94), $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$, temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d[\text{Log}(\varphi/M)]$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/M)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(M; e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left(\frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{\bar{e}^2} \right) = \text{Log}(\varphi/M)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left(\frac{e_R^2}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/M)}$$

(eq. 103.1)

O que é muito similar à expressão 7.96 do Peskin, e fica idêntica se escolhermos M da ordem da massa do elétron $M^2 = A m^2$, $e_r = e$ e $A = e^{(5/3)}$.

Evolução (*running*) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \beta(\lambda) > 0 & & \beta(\lambda) < 0 \end{array}$$

$\beta(\lambda) = 0$