

Quantização por Integrais de Trajetória:

O Oscilador Harmônico

(Peskin cap 9, Ramond 2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$\begin{aligned} \boxed{m=1} \Rightarrow L &= \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} & \Rightarrow H &= p\dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) = \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} & &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \end{aligned}$$

$\hbar = 1$

$$\boxed{a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + ip)} \quad \boxed{a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - ip)} \quad (\text{eq. 1.1})$$

$$\begin{aligned} \therefore p &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{eq. 1.2})$$

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{\omega}{2} (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{\omega}{2} \left(\underbrace{a a^\dagger + a^\dagger a} \right) \quad (\text{eq. 1.3})$$

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poisson como:

$$\begin{aligned} f = f(p, q) \\ g = g(p, q) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\{f, g\}_{PB} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)} \quad (\text{eq. 1.4})$$

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_0 - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{ij}$$

$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$

Podemos escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k}} \right) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)\end{aligned}\quad (\text{eq. 2.1})$$

Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar q e p em operadores \hat{q} e \hat{p} , substituindo os Brackets de Poisson por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p} \quad \{, \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \rightarrow -i [\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i \delta_{ij}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{q}_i] = -i$$

(eq. 2.2)

(eq. 1.2) \rightarrow $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ (eq. 2.3)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (5.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}}_i &= \{ \hat{q}_i, H \}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i [\hat{q}_i, \hat{H}] \\ \dot{\hat{p}}_i &= \{ \hat{p}_i, H \}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i [\hat{p}_i, \hat{H}]\end{aligned}\quad (\text{eq. 2.4})$$

E o hamiltoniano pode ser obtido de (1.3)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}}_{1 + \hat{a}^+\hat{a}} \right) = \hbar \omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{eq. 2.5})$$

\searrow se tivéssemos acompanhado os \hbar 's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação n e os operadores a^\dagger e a são operadores de criação e aniquilação:

$$a^\dagger |n\rangle = A_n |n+1\rangle \quad ; \quad a |n\rangle = A'_n |n-1\rangle \quad (\text{eq. 3.1})$$

normalizações

$$a^\dagger a |n\rangle \equiv \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (\text{eq. 3.2})$$

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, definido por $a |\Omega\rangle = 0$

$$\therefore \hat{N} |\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é: $\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$

$$\hat{H} |n=0\rangle = E_0 |n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad \text{Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$:\hat{H}: = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} = \omega \hat{N}$$

Integral de Trajetória de Feynman

(Peskin 9.1, Ryder 5.1)

Uma quantidade que frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição q em um tempo t , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição q' no tempo t' . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\Psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F , definido por:

$$\Psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \Psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 3.3})$$

$|\Psi(q', t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q' no tempo t' , determinada por tudo que pode ter acontecido antes de t'

A equação 3.3 é uma simples expressão de causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q, t) e a em (q', t') e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejamos como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi(t) \rangle \quad \text{Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)}$$

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H$$

Quadro de Heisenberg
(operadores evoluem no tempo, estados não)

I é UAIS

$$\hat{q}_S |q(t)\rangle_S = q(t) |q(t)\rangle_S \quad \hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t}$$

$$\hat{p}_H(t) |q,t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} \hat{p}_S e^{-i\hat{H}t} e^{i\hat{H}t} |q(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}t} q(t) |q(t)\rangle_S = q(t) |q,t\rangle_H$$

∴ $|q,t\rangle_H$ autoestado de $\hat{q}_H(t)$ no tempo t

Definamos o vetor:

$$|q,t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |q(t)\rangle_S$$

(Moving Frame - autoestados das coordenadas no quadro de H.)

$$\therefore \Psi(q,t) = \langle q | e^{-i\hat{H}t} | \psi \rangle_H = \langle q,t | \psi \rangle_H$$

$\hat{1} = \int |q,t\rangle \langle q,t| dq$

Dado: $\langle q',t' | \psi \rangle_H = \int \langle q',t' | q,t \rangle \langle q,t | \psi \rangle_H dq$

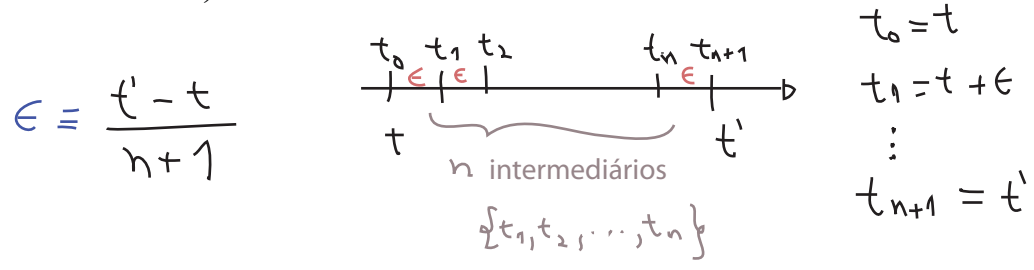
$\Psi(q',t')$ $\Psi(q,t)$

$$\Psi(q',t') = \int \langle q',t' | q,t \rangle \Psi(q,t) dq$$

Que, comparada com 3.3, nos dá: $F(q',t', q,t) = \langle q',t' | q,t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle$

Vejamos agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em $(n+1)$ pequenos intervalos ϵ (estamos sempre pensando no limite do contínuo):



Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completudeza:

$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i |q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i| = 1$$

note que todos os q_i são variáveis mudas, e portanto a identificação do índice de q com o índice de t é arbitrária, mas em seguida teremos $\hat{q}_H(t) |q_i, t_i\rangle = q_i(t_i) |q_i, t_i\rangle \equiv q_i$

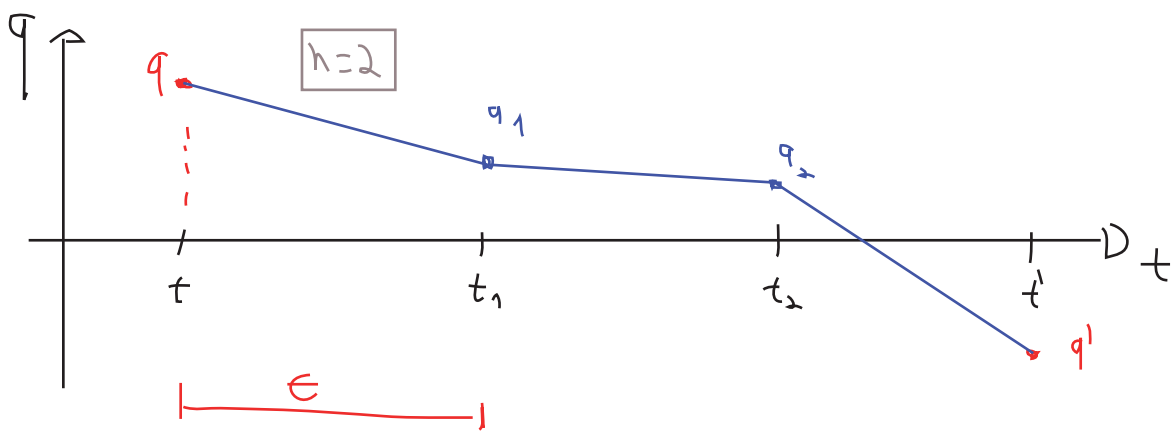
↑ índice do tempo
↑ índice mudo

n identidades

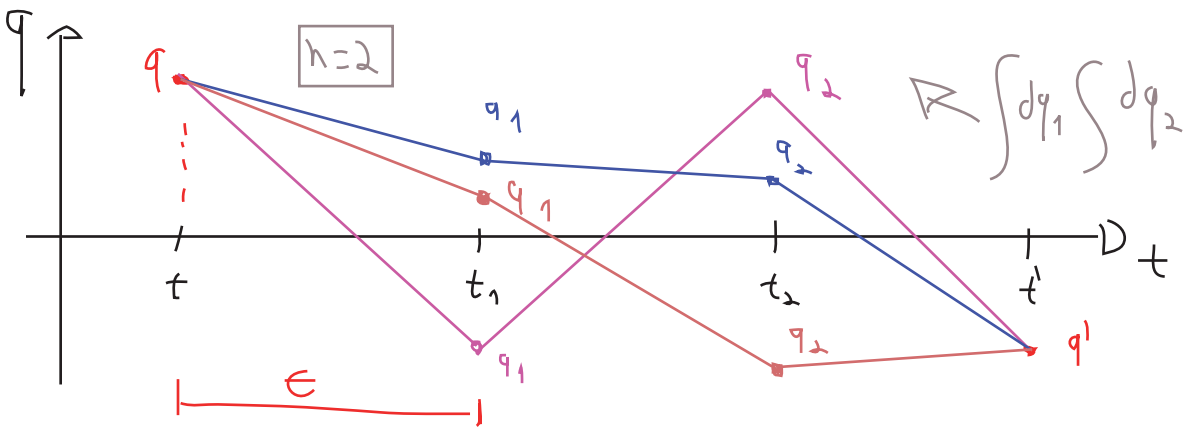
$$F(q',t', q,t) = \int dq_1 \dots dq_n \langle q',t' | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

(eq. 4.1)

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos $\epsilon \rightarrow 0$, a diferença $q_{i+1} - q_i$ não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 4.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (\text{eq. 5.1})$$

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n \int dq(t_i) \quad (\text{eq. 5.2})$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p | q \rangle$$

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | p \rangle = \int dq \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \langle p' | q \rangle \langle q | p \rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \int dq e^{i(p'-p)q} \delta(p-p') = |p\rangle$$

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle = \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} \langle q(t_n) | p(t_n) \rangle \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores \hat{p} e \hat{q} , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores \hat{p} à esquerda dos operadores \hat{q} (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para ϵ pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em \hat{H} , vale:

$$\begin{aligned} \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q(t_{n-1}) \rangle &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon H(p(t_n), q(t_{n-1})) | q(t_{n-1}) \rangle = e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \langle p(t_n) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i q(t_n) p(t_n)} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} = \\ &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i p(t_n) [q(t_n) - q(t_{n-1})]} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \end{aligned}$$

Com isso, a eq. 4.1 fica:

$$\begin{aligned} F(q', t', q, t) &= \int \left(\prod_i^n dq_n \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \dots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} = \\ &= \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \left(\prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i \left\{ \underbrace{p(t_{n+1}) [q(t_{n+1}) - q(t_n)]}_{\epsilon} + \dots + \underbrace{p(t_1) [q(t_1) - q(t_0)]}_{\epsilon} \right\}} \times \\ &\quad \times e^{-i \epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \dots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_0 = t \\ t_{n+1} = t' \\ q_0 = q(t) \\ q_{n+1} = q(t') \end{cases}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (n \rightarrow \infty)$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\} \quad (\text{eq. 6.1})$$

A equação 6.1 é bastante geral, mas é possível encontrar uma expressão mais simples (e mais útil) no caso de hamiltonianas que tenham a forma:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad (m=1) \quad (\text{eq. 7.1})$$

Neste caso temos: $F(q^1 t^1, q t) = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\}$

(eq. 7.2)

E podemos fazer a integral em $p(t)$ como uma Gaussiana generalizada, para ver o que isso quer dizer façamos um interlúdio de matemática.

— // Gaussianas // —

A gaussiana que conhecemos é:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Elevando isto ao quadrado podemos obter:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Com n integrais multiplicadas (e trocando α por $\alpha_n/2$):

$$\int dx_1 \dots dx_n \text{EXP} \left[-\frac{1}{2} \sum_i \alpha_i x_i^2 \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod \alpha_i^{1/2}}$$

podemos organizar os α 's em uma matriz, suponha:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Então o produto escalar:

$$(\vec{x}, A\vec{x}) = x_i A_{ij} x_j = \sum_i \alpha_i x_i^2$$

$$\& \text{DET } A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \prod \alpha_i$$

Logo, podemos re-escrever a integral:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = (2\pi)^{n/2} (\text{DET } A)^{-1/2} \quad (\text{eq. 7.3})$$

que de fato vale para qualquer matriz (real) A que seja diagonalizável.

Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como uma ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad \frac{\delta}{\delta x_k} \left(\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i \right) = \frac{1}{2} \delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ik} \delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2} A_{kj} x_j + \frac{1}{2} A_{ik} x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \vec{x}_c = -A^{-1} \vec{b}$$

← CLÁSSICO

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2} (-A^{-1} \vec{b})^T \cdot A \cdot (-A^{-1} \vec{b}) + \vec{b}^T (-A^{-1} \vec{b}) = -\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A (\vec{x} - \vec{x}_c) - \frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

equação da parábola com mínimo em \vec{x}_c

$$\int d^n x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = e^{-S(\vec{x}_c)} \int d^n x e^{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}}$$

(eq. 8.1)

Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q' t', q t) = \int \mathcal{D}q(t) \exp \left\{ -i \int_t^{t'} dt V[q(t)] \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\}}_{\prod_i \frac{\hbar}{2\pi} \exp \left\{ i \in \left[p(t_i) \dot{q}(t_i) - \frac{1}{2} p(t_i)^2 \right] \right\}}$$

com: $x_i = p(t_i)$ $b = -i \in \dot{q}(t_i)$ $(A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon} \delta_{ij}$
 $A_{ij} = i \in \delta_{ij}$

podemos usar 8.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} (i\epsilon)^{-n/2} \text{EXP} \left[\frac{1}{2} (+i\epsilon \dot{q}(t_i)) \left(\frac{1}{\epsilon} S_{ij} \right) (+i\epsilon \dot{q}(t_f)) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}}_{\mathcal{N}} \text{EXP} \left[i \int_t^{t'} dt \frac{\dot{q}(t)^2}{2} \right] \quad (\text{eq. 9.1})$$

Com isso, nossa amplitude de transição fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[\frac{\dot{q}(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q}) \right\}$$

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q]} \quad (\text{eq. 9.2})$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 6.1 e 9.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Lagrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores \hat{q} e \hat{p} por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do facto de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para $q(t)$ e $p(t)$ (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 9.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

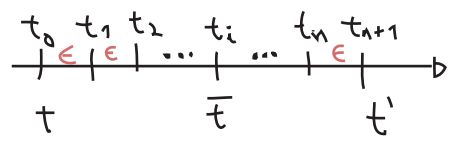
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são **completamente equivalentes**, acima usamos a evolução temporal que se obtém como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 9.2 e mostrou que as funções de onda em 3.3 satisfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 7.1).

Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \quad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar \bar{t} com um dos t_i intermediários:



Em meio aos diversos $\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$ que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \stackrel{t_i = \bar{t}}{=} \underbrace{q(\bar{t})}_{\text{não é mais um operador}} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este $q(\bar{t})$ dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle \rightarrow \text{só sabemos tratar isso se de fato: } t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$$

$$\int \mathcal{D}q \ \langle q', t' | q_{j+1}, t_{j+1} \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle \dots \langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$\bar{t}_2 = t_j \Rightarrow q(\bar{t}_2) < 1 >$ $\bar{t}_1 = t_i \Rightarrow q(\bar{t}_1) < 1 >$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 10.1})$$

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 10.2})$$

desde que $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

note que são funções e comutam

Logo vemos que, tentando escrever 10.1 e 10.2 como uma única expressão, temos:

$$\int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} | q, t \rangle \quad (\text{eq. 11.1})$$

onde aparece o **Produto Temporalmente Ordenado** (recorde como estes produtos aparecem na versão canônica):

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases} \quad (\text{eq. 11.2})$$

Tanto 11.1 e 11.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_1), \dots, \hat{q}(\bar{t}_N) \} \equiv \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_N) \leftrightarrow \bar{t}_N < \dots < \bar{t}_1$$

ordenados temporalmente

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_n) \} | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_1) \dots q(\bar{t}_n)$$

Função de n-pontos ou **Função de Correlação** (de n pontos) ou **Correlator**. (eq. 11.3)

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a **função geradora** $F(z)$:

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que: $a_n = \frac{d^n}{dz^n} F(z) \Big|_{z=0}$ (conhecer esta função nos permitir obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o **funcional gerador**:

$$Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} G_N(t_1, \dots, t_N) J(t_1) \dots J(t_N)$$

convencional

(eq. 11.4)

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t 's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J 's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo G_n de 11.3:

$$Z[\mathcal{J}] = \sum_{N>0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} \mathcal{J}(t_1) \dots \mathcal{J}(t_N) \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) =$$

$$= \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[\int dt i q(t) \mathcal{J}(t) \right]^N = \int \mathcal{D}q e^{i \underbrace{[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]}_{S[q, \mathcal{J}]}}$$

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \mathcal{J}]}$$

(eq. 12.1)

Para ver como podemos obter qualquer G_n , basta fazer as **derivadas funcionais**:

$$\frac{\delta^N}{i \delta \mathcal{J}(t_1) \dots i \delta \mathcal{J}(t_N)} Z[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = G_N(t_1, \dots, t_N)$$

(eq. 12.2)

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [a] no site do curso (<http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2018tqc2/funclderiv.pdf>), e as referências lá citadas.

Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \quad \frac{\delta g(p(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{dg}{dp} \Big|_{p=p(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i \delta \mathcal{J}(t_1) i \delta \mathcal{J}(t_2)} Z[\mathcal{J}] = \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_2)} \int \mathcal{D}q e^{i[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]} \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \left[i(S[q] + \int dt q(t)J(t)) \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \int dt q(t) \delta(t-t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]}}_{q(t_1) e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q, J]}$$

$$\therefore \frac{\delta^2}{i\delta J(t_1) i\delta J(t_2)} Z[J] \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]} \Big|_{J=0} = G_2(t_1, t_2) //$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos voltar ao oscilador harmônico.

O oscilador Harmônico forçado

(Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Quando definimos o gerador funcional (eqs. 11.4 e 12.1):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q; J]} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q] + i\int dt q(t)J(t)}$$

a partir do qual obtemos os correlatores (16.2):

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J(\bar{t}_n)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

Não discutimos o significado da função $J(t)$, que não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos $J(t) = 0$. A ação definida com a inclusão do termo com J é:

$$S[q; J] = S[q] + \int dt J(t) q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação: $\frac{\delta S[q; J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$

Se $L(q) = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \Rightarrow \boxed{-\omega^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0}$ (eq. 14.1)

Oscilador Harmônico Forçado

Note que $J(t)$ é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de $q(t)$ (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação $S[q; J] = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \int dt J q$ é quadrática em q e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 8.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de $q(t)$, vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + J q \right] = \int dt \left[-\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q + J q \right]$$

$$\int \frac{dq}{dt} \frac{dq}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(q \frac{dq}{dt} \right) - \int q \frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \int dt \left[-\frac{1}{2} q \cdot \Delta^{-1} q + i J \cdot q \right] \right\}$$

$$\Delta^{-1} = i \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right)$$

$$J \cdot q = \int dt J(t) q(t)$$

Comparando com 8.1:

$$\int d^N x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x} \right)} = (2\pi)^{N/2} (D_{ET} A)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{L} &= -i J(t) \\ A &= \Delta^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

(por enquanto usaremos este resultado, mas cuidado!
Veja eq 17.2 para a versão correta)

$$\underbrace{(D_{ET} \Delta^{-1})^{-1/2}}_{\text{(não depende de J)}}$$

$$\mathcal{T} \cdot \Delta \cdot \mathcal{T} = \int dt \int dt' \mathcal{T}(t) \Delta(t, t') \mathcal{T}(t')$$

$$\Delta^{-1} \Delta(t, t') = i \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] \overbrace{i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2}}^{\text{ANSATZ } p/\Delta} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{-p^2 + \omega^2}{p^2 - \omega^2} e^{-ip(t-t')} = \delta(t-t')$$

$$\Delta(t, t') = i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2} \quad (\text{eq. 15.1})$$

↘ No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada (como fizemos antes) escolhendo caminhos apropriados no plano complexo.

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de Δ^{-1} ? A pergunta pode ser respondida pensando em que espaço de funções Δ^{-1} está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] q_0(t) = 0 \quad (\text{eq. 15.2})$$

isto significaria que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, **não pode ser invertido!** Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$$\hookrightarrow q_0(t) = C_{\pm} e^{\pm i\omega t}$$

Para conseguir inverter Δ^{-1} , portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que Δ^{-1} está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam variadas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a integral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções $q(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ não triviais se:

$$q(t_i) \neq 0 \quad \text{ou} \quad q(t_f) \neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}) = 0$$

$$q_0(t_f) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (C_+ - C_-) \sin\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \\ (C_+ + C_-) \cos\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall t_i \\ \forall t_f \end{array} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad (\text{eq. 16.1})$$

↳ Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de q para \tilde{q} é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int \mathcal{D}q e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]} = \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(q_{cl,i} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

↳ número

Lembrando que (pg 8), se acharmos um extremo q_0 de $S[q; J]$, podemos escrever:

$$\left. \begin{aligned} S[q; J] &= \frac{1}{2} A q^2 + J q \\ \frac{\delta S}{\delta q}[q; J] \Big|_{q=q_0} &= 0 \end{aligned} \right\} = S[q_0; J] + \frac{1}{2} A (q - q_0)^2 = S[q; J] + S[q - q_0; 0]$$

justamente a ação para $J = 0$

Acontece que q_{cl} é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[q - q_{cl}; 0]} \Rightarrow S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[\tilde{q}; 0]$$

(eq. 16.2)

$$\therefore Z[J] = e^{iS[q_{cl}; J]} \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[\tilde{q}; 0]}$$

(eq. 16.3)

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z . O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador Δ^{-1} numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore Z[J] = \mathcal{N} e^{iS[q_{cl}; J]}$$

(eq. 16.4)

E a equação de movimento para q_α é

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t) \quad (\text{eq. 17.1})$$

E a solução:

$$q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t)$$

$\hookrightarrow \Delta^{-1} q_\alpha(t; 0) = 0$ (estas são as funções problemáticas que satisfazem a eq. 15.2, posso inverter Δ porque ele agora age em $q_\alpha(t; \mathcal{J})$, o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = \int dt' \left[\frac{\delta S}{\delta q(t')} \Big|_{q=q_\alpha} \frac{\delta q_\alpha(t'; \mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}(t)} + \frac{\delta S}{\delta \mathcal{J}} \right] =$$

$$\int d\mathcal{J} \left(\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t) \right)$$

$$S[q_\alpha(\mathcal{J}); \mathcal{J}] = S[q_\alpha(0); 0] + q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J} + \frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}$$

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} e^{i S[q_\alpha; \mathcal{J}]} = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} + i q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J}} \quad (\text{eq. 17.2})$$

(eq. 16.4)

Ainda resta saber qual é a forma deste Δ e quais condições de contorno usamos para $q_\alpha(t; \mathcal{J})$ na eq. 17.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 15.1 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$P^2 \rightarrow P^2 + i\epsilon \quad (\text{eq. 17.3})$$

$$\Delta_F(t, t') = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p (t-t')}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon}$$

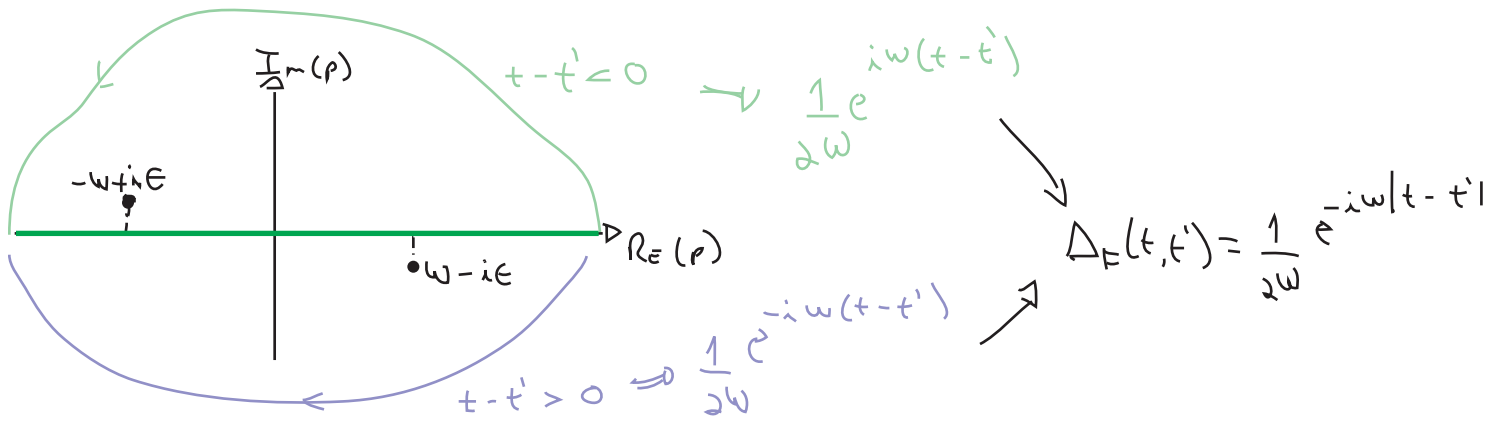
polos em:
 $p = \pm(\omega - i\epsilon)$

que obviamente não é inocente, compare com o propagador de Feynman que você conhece e note que estamos fazendo uma "teoria de campos" com 0 dimensões espaciais e uma temporal:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p (t-y)} \rightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} e^{-i p^0 (t-y)}$$

$$-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon \rightarrow \omega^2 - i\epsilon$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Voltemos então a equação 17.1:

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; J) = i J(t) \Rightarrow i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right) q_\alpha(t, J) = i J(t)$$

E lembrando que:

$$\underbrace{i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right)}_{\Delta^{-1}} \left(i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - w^2 + i\epsilon} \right) = \delta(t-t')$$

$\Delta_F(t-t')$

Fica fácil deduzir que:

$$q_\alpha(t, J) = i \int dt' \Delta_F(t-t') J(t')$$

Assumindo que $J(t) \rightarrow 0 / t \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \int dt' \rightarrow \int_{-T}^T dt'$ algum número finito, pois fora desta região $J(t) = 0$

Então: $t \rightarrow \infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{-i\omega t} \underbrace{i \int_{-T}^T dt' \frac{e^{i\omega t'}}{2\omega} J(t')}_{\text{const.}} = A e^{-i\omega t}$

$t \rightarrow -\infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{+i\omega t} \int_{-T}^T dt' \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega} J(t') = B e^{+i\omega t}$

Vemos que a prescrição 17.3 (chamada de **prescrição de Feynman**) é equivalente a resolver 17.1 com as condições de contorno:

$$q_\alpha(t \rightarrow \infty, J) = e^{-i\omega t}$$

$$q_\alpha(t \rightarrow -\infty, J) = e^{+i\omega t}$$

(eq. 18.1)

e estas condições exigem que $J(t)$ seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 15.2, vemos que a integral de trajetória original em $q(t)$ está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 18.1 e a quântica satisfazendo 16.1).

Rotação de Wick para o tempo Euclidiano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que α ou x sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a [Saddle Point Approximation](#):

$$S = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \delta q_a S_{ab} \delta q_b + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta q} \Big|_{q=q_{cl}} = 0$$

se a ação já é quadrática em q (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclidiano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n > 0$$

$$\hat{1} = \sum |n\rangle \langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle_H &= \langle q' | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle = \sum_n \sum_m \langle q' | n \rangle \underbrace{\langle n | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | m \rangle}_{\delta_{mn} e^{-iE_n(t'-t)}} \langle m | q \rangle = \\ &= \sum_n \langle q' | n \rangle \langle n | q \rangle e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} \end{aligned}$$

Que é uma função analítica em $\Delta t \equiv (t' - t)$ e portanto admite a continuação:

$\Delta t \rightarrow -i t_E$

Rotação de Wick
(eq. 20.1)

A razão pela qual "rodamos" nesta direção é a seguinte, considere o operador de evolução "para o futuro" (estamos especializando para o caso $\Delta t > 0$):

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\Delta t} = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\text{Re}[\Delta t]} e^{\frac{\hat{H}}{\hbar}\text{Im}[\Delta t]}$$

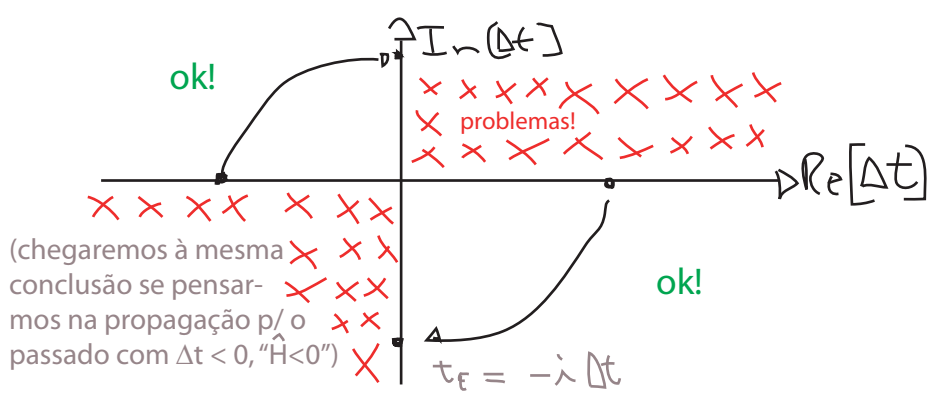
\rightarrow propagação p/ futuro ($\Delta t > 0$, " $\hat{H} > 0$ ")

$\left\{ \begin{array}{l} > 1 \\ < 1 \end{array} \right.$

$\begin{array}{l} \text{Im}[\Delta t] > 0 \\ \text{Im}[\Delta t] < 0 \end{array}$

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em Δt ? - U só é limitado para valores negativos de $\text{Im}[t]$:

$$\langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle \leq c \langle \Psi | \Psi \rangle$$



Com esta rotação temos:

$\langle q', t_E | q, 0 \rangle_H = \sum_n \Psi_n(q') \Psi_n^*(q) e^{-\frac{t_E E_n}{\hbar}}$

(eq. 20.2)

Note que: $\int dq_H \langle q, \tau | q, 0 \rangle_H = \sum_n e^{-\frac{\tau E_n}{\hbar}} = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\tau \hat{H}}{\hbar}} \right\} = Z\left(\frac{\tau}{\hbar}\right)$

$\int dq |\Psi_n(q)|^2 = 1$

Euclidiano (vou usar τ quando os pontos inicial e final forem iguais)

note que o estado inicial e final são iguais e estamos integrando sobre eles também

também temos $k = 1$ em unidades naturais

$$k T_Q = \frac{\hbar}{\tau} \equiv \frac{1}{\beta}$$

é a função de partição canônica do sistema para uma temperatura

$\tau = \hbar \beta$

(eq. 20.3)

Ou seja, a função de partição do sistema é obtida integrando sobre um ponto de uma trajetória fechada ($q^1 \equiv q(\tau) = q(0) \equiv q$) e de "comprimento" $\tau = \hbar\beta$ no tempo Euclidiano.

Vejamos como fica a integral de trajetória para esta mesma transição. A lagrangiana é:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - V(q)$$

O expoente na integral de trajetória fica:

$$iS[q] = i \int_t^t dt'' \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt''} \right)^2 - V(q) \right] = i \int_0^{\hbar\beta} (-i dt_E) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{d(-i t_E)} \right)^2 - V(q_E) \right] \equiv -S_E[q_E]$$

\uparrow $\hbar\beta = \tau$
 \uparrow $i\Delta t$
 \uparrow $q(t'') \rightarrow q(-i t_E) = q_E(t_E)$

$\textcircled{1} t'' \rightarrow t'' - t \Rightarrow \int_0^{\Delta t} dt'' \Rightarrow \textcircled{2} t_E = -i t''$
 $\tau = i \Delta t = \hbar\beta$

$\Rightarrow iS[q] = -S_E[q_E]$

$$\therefore S_E[q_E] = \int_0^{\hbar\beta} dt_E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right] = \int dt_E L_E(q_E, \dot{q}_E)$$

$\hookrightarrow T + V$ (Hamiltoniana Clássica)

Para obter então a função de partição, basta então exigir que os extremos da trajetória sejam o mesmo ponto (trajetória fechada) e incluir a integral sobre este ponto em \mathcal{D}_q . Na prática estamos integrando sobre todos os caminhos fechados de comprimento $\hbar\beta$.

$$Z(\beta) = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\hbar\beta}{\hbar} \hat{H}} \right\} = \int_{q_E(t_E + \tau) = q_E(t_E)} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} \quad \text{Fórmula de Feynman-Kac}$$

(eq. 21.1)

Podemos tirar qualquer quantidade de interesse da função de partição, uma vez que ela tem toda informação relevante do sistema. De fato a mecânica estatística de uma partícula quântica em contato com um banho térmico em temperatura T é dada pela **matriz de densidade**:

$$\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{fator de Boltzman}$$

\hookrightarrow normalização

que contém as probabilidades de encontrar a partícula nos estados de energia E_n : $\frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$

A condição de normalização identifica Z como a função de partição:

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_\beta] = 1 \iff Z(\beta) = \text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H})]$$

O valor esperado de qualquer observável \hat{O} é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{O}) \quad (\text{eq. 22.1})$$

A matriz de densidade é proporcional ao próprio operador de evolução no espaço Euclidiano:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \rightarrow \hat{U}(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}}$$

$\tau = \hbar \beta$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_0}$$

$$k_B T_0 = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{1}{Z} \hat{U}(-i\tau) \quad Z = \text{Tr}[\hat{U}(-i\tau)]$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Recapitulando:

Partícula (quântica) em eq. com banho de temperatura T

$$\hat{\rho}_{\beta} (e^{-\beta \hat{H}}), \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

Partícula (quântica) isolada em tempo imaginário

$$\hat{U}(-i\tau)$$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

(22.2)

Além disso, a métrica agora é de um espaço Euclidiano:

$$ds^2 = dt^2 - dq^2$$

$$\downarrow t = -i t_E$$

$$-ds_E^2 = -(dt_E^2 + dq^2) \Rightarrow \text{distância Euclidiana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

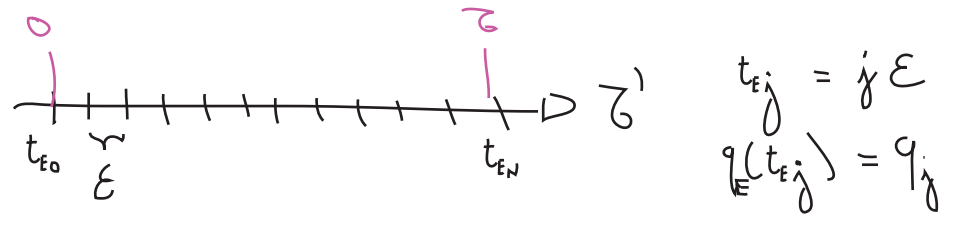
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto, t_E é uma variável tipo espaço. Vejamos o que acontece se pensarmos na variável de integração t_E como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$S_E[q_E] = \frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} dt_E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right]$$

$$V(q_E) = \frac{\omega^2}{2} q_E^2$$

Discretizando o "tempo Euclideo":



$$\int \mathcal{D}q_E \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau_0} dt_E \left[\frac{\dot{q}_E^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\int \prod dq_j \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

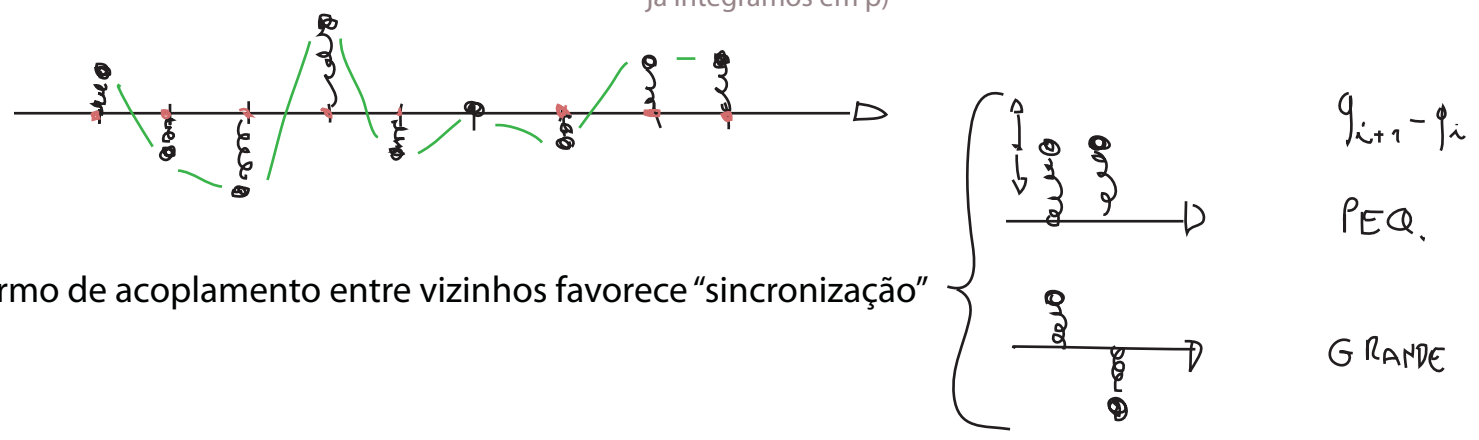
Isso é exatamente a função de partição de um sistema clássico em temperatura T_S

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_j}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

1 $\frac{1}{k_B T_S}$ energia total energia potencial de um oscilador clássico

acoplamento entre vizinhos

Na prática temos um sistema de osciladores: (falta o termo p^2 de cada oscilador, mas isso é porque já integramos em p)



O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"

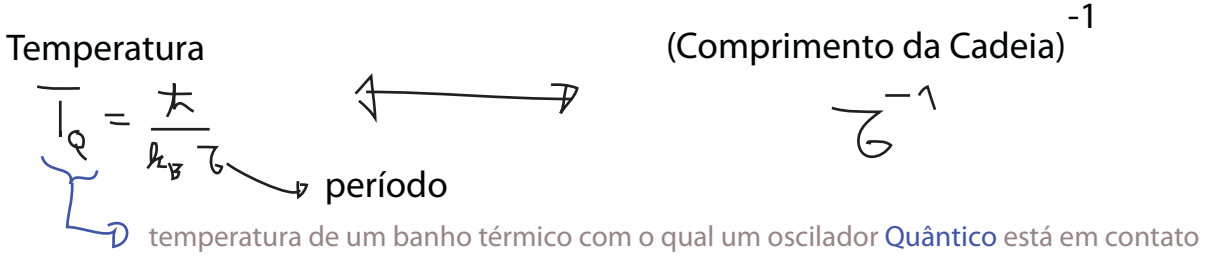
1 Oscilador Quântico (em tempo imaginário) \longleftrightarrow Cadeia de osciladores clássicos acoplados

Futuações quânticas \longleftrightarrow Futuações térmicas

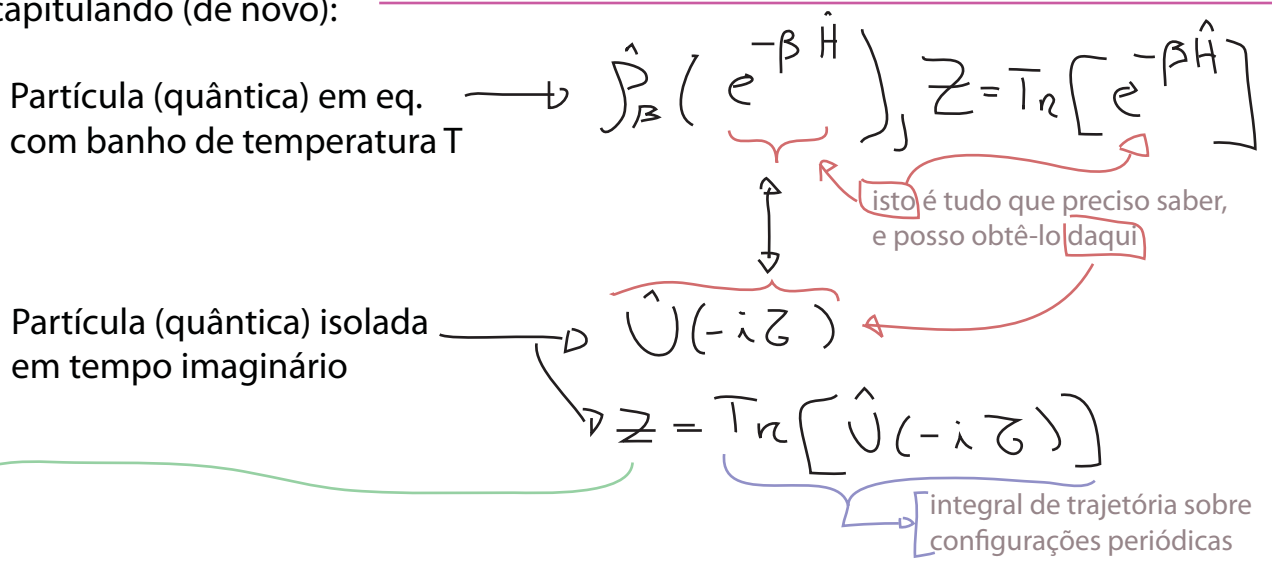
\mathcal{R} \longleftrightarrow $k_B T_S$ } temperatura do Sistema de osciladores clássicos

1 grau de liberdade \longleftrightarrow número grande graus de liberdade clássicos

Lembrando ainda que uma partícula quântica em tempo imaginário pode ser interpretada como uma partícula quântica em contato com um banho T_Q :



Recapitulando (de novo):



É também a função de partição de um sistema clássico (de fato de muitos sistemas clássicos acoplados aos "primeiros vizinhos") \rightarrow Mecânica Estatística

(24.1)

Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$\hat{A}(q) \xrightarrow{(22.1)} \text{quântica em T}$

$$\langle \hat{A}(q_E) \rangle_{\beta} = \text{Tr} [\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{A}(q_E)] = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(q_E)]}{Z}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$$

$$= \frac{\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)]}{\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)]}$$

21.1

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))$$

$\hat{A}(q_E) |q_E(\tau_1)\rangle = A(q_E(\tau_1)) |q_E(\tau_1)\rangle$

(em caminhos periódicos)

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))}{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}}$$

Note que qualquer fator multiplicativo indeterminado vindo da integral de trajetória (tal como o volume do espaço) vai ser cancelado

(eq. 25.1)

Notem que, pensando em $\int \mathcal{D}q_E$ como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura $T_s = \frac{\hbar}{k_B \tau}$

$$T_Q = \frac{\hbar}{\tau k_B}$$

O que acontece quando fazemos $T_Q \rightarrow 0$?

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_Q}$$

$$T_Q \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

Seleciono a configuração de menor energia

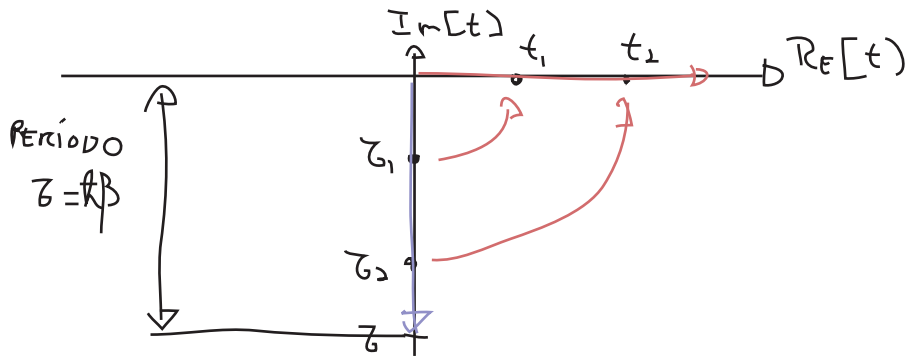
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0}$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero **projeta os operadores no vácuo da teoria**. Com isso podemos entender outra forma de obter as funções de Green de interesse (a função de dois pontos abaixo é um exemplo dos chamados **Propagadores de Feynman**):

$$\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor $\langle \hat{q}_E(z_1) \hat{q}_E(z_2) \rangle_{\beta = \frac{\tau}{\hbar}} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{i}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$

$(z_1 < z_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$

e então voltar ao tempo real fazendo: $z_1 \rightarrow i t_1$
 $z_2 \rightarrow i t_2 \Rightarrow \langle \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \rangle_{\beta}$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com $z_2 < z_1$ (note que na integral de trajetória não há diferença), teríamos voltado para: $\langle \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \rangle_{\beta}$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

$$\langle T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} \rangle_{\beta}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$

Podemos também obter uma expressão para o propagador/correlator livre em temperaturas finitas:

$$\Delta_{FREE}^E(t_E) = \langle T \{ \hat{q}(-i t_E) \hat{q}(0) \} \rangle_{\beta}$$

considerando a equação de movimento (Oscilador Harmônico):

$$\left[\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right] \Delta_{FREE}^E(t_{E1} - t_{E2}) = \delta(t_{E1} - t_{E2}) \quad (\text{eq. 26.1})$$

$$-\frac{d^2}{dt_{E1}^2} + \omega^2$$

1 (já podemos voltar para unidades naturais)

Lembrando que, como o espaço Euclideo é cíclico de período $\tau = \hbar\beta$, vale:

$$\Delta_{FREE}^E(t_E \pm \beta) = \Delta_{FREE}^E(t_E)$$

A eq. 45.1 tem somente uma solução para $(t_{E1} - t_{E2}) \in [0, \beta]$:

$$\Delta_{F \neq E E}(t_E) = \frac{1}{2\omega} \left[(1 + n(\omega)) e^{-\omega t_E} + n(\omega) e^{\omega t_E} \right] \quad (\text{eq. 27.1})$$

onde:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (\text{eq. 27.2})$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad n(\omega) \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty & \quad \Delta_{F \neq E E} \rightarrow \Delta_F(t_E) = \frac{e^{-\omega t_E}}{2\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(compare com a solução} \\ \text{da pg 18)} \\ \text{voltando para Minkowski} \end{array}$$

O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Vejamos como fica o oscilador no espaço Euclideano. Partindo da ação:

$$i S[q] = i \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + J q \right]$$

$$\begin{array}{l} W \\ | \\ C \\ | \\ K \end{array} \left\{ \begin{array}{l} t = -it_E \\ q(t) = q(-it_E) = q_E(t_E) \\ J(t) = J(-it_E) = J_E(t_E) \end{array} \right. \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \left(\frac{1}{-i} \right)^2 \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2$$

$$-S_E[q] = \int dt_E \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q_E^2 + J_E q_E \right]$$

Suprimindo todos os índices "E" para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z_E[J] = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt \left[\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] + \int dt J(t) q(t) \right\} \quad (\text{eq. 27.3})$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 14):

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt q \left[-\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q \right] + \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt J(t) q(t) \right\} = \\ &= N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int ds \int ds' J(s) \Delta_E(s, s') J(s') \right\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} z_1 \rightarrow -\infty \\ z_1+\beta \rightarrow \infty \quad \leftrightarrow \quad \beta \rightarrow \infty \\ \downarrow \\ \text{(*)} \quad \begin{array}{l} J(t) \neq 0 \quad -T < t < T \\ J(t) = 0 \quad |t| > |T| \end{array} \end{array} \quad (\text{eq. 27.4})$$

note que este Δ é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{d^2 q_\mu}{dt^2} + \omega^2 q_\mu = J(t)$$

$$q_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Delta_\mu(t, t') J(t')$$

$$\Delta_E(s, s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} \quad (\text{eq. 28.1})$$

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right) \Delta_E(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \left(-(-i E_E)^2 + \omega^2\right) \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} = \delta(s-s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 27.4 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclidiano em 28.1 não tem pólos para E_E real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de Δ_E : $E_E = \pm i \omega$

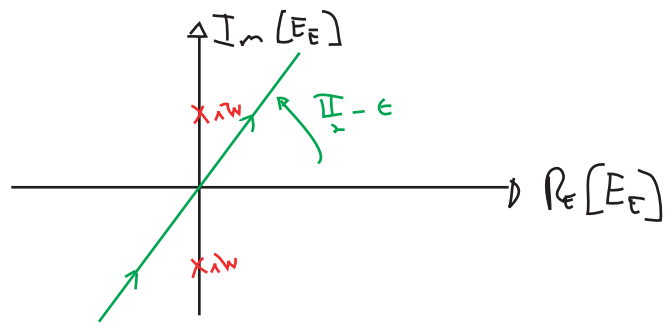
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que $t = -i t_E$ mas como rodamos E_E ? Primeiramente exigimos que $E t = E_E t_E$, então:

$$E \approx i E_E \approx e^{i \frac{\pi}{2}} E_E \quad E t = (i E_E)(-i t_E) = E_E t_E$$

(o que é arbitrário, mas vai garantir que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com t ou t_E crescente quando passarmos para mais dimensões, uma vez que:

$$e^{i p_\mu x^\mu} = e^{-i(\vec{E}t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(E_E t_E - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para $E_E = -i E$ mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E_E = i(E_E - i \epsilon)$$

ou

$$E_E = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E = -i(E + i \epsilon)$$

Com esta rotação temos:

$$(\text{eq. 28.1}) \Rightarrow \Delta_E(t_E = i t) = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E t_E}}{E_E^2 + \omega^2} = \int \frac{i dE}{2\pi} \frac{e^{-i E t}}{E^2 - \omega^2 + i \epsilon} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = [-i(E + i \epsilon)]^2 = -(E^2 + i \epsilon E + \epsilon^2)$$

compare com o fim da pg 17 (lembrando que lá $p = p^0 = E$)

De forma que, mais uma vez, somos levados à prescrição de Feynman.

Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias usadas no oscilador harmônico para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

- (1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclidiano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)
- (2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos $\beta \rightarrow 0$ (período infinito na integral de traj.)
- (3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_\nu(t) \rightarrow \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$$

↑ tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | \Omega \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

informações sobre o estado (eg. $|\Omega\rangle$ vs $|\Omega\rangle$ ou vácuo vs estado excitado) estão na ação usada e nas condições de contorno da integral

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclidiana:

$$-S_E[\phi] = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right] \quad (\text{eq. 106.1})$$

(todos os índices "E" foram suprimidos)

EUCLID: $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$$x^0 = x_0 \equiv -i x^1 \quad x^1 = x_1 = t_E$$

$$x^1 = i x^0$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \partial_i \phi \partial_i \phi =$$

$$= - \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \partial_i \phi \partial_i \phi = - \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi$$

As funções de Green Euclidianas são:

$$G_n^{(E)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período β :

$$Z[\beta, J] = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}_3} \right\} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}$$

$\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$

$J\phi = \int d^d x \ J(x)\phi(x)$

$\beta \rightarrow \infty$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi} \equiv \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{eq. 30.1})$$

estamos generalizando o raciocínio a seguir para um número arbitrário de dimensões

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi] + J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}} \Bigg|_{J=0} \quad (\text{eq. 30.2})$$

e (por definição):

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^d x_i \ G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{eq. 30.3})$$

Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \ e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G_n(x_1, \dots, x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - X, x_2 - X, \dots, x_n - X)$$

escolhendo: $X = x_1$ e mudando as integrais: $x_i \rightarrow x_i + x_1 \quad i \geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \left[\int d^4 x_1 \ e^{i x_1 (p_1 + \dots + p_n)} \right] \left[\int d^4 x_2 \dots d^4 x_n \ e^{i(x_2 p_2 + \dots + x_n p_n)} G_n(0, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G_n(p_1, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependência de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos $p_1 = p_2 + \dots + p_n$
 nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores **quaisquer** no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat{\phi}\}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \mathcal{O}[\{\hat{\phi}\}]$$

vácuo da teoria livre

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então: $\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}$ (eq. 31.1)

e se: $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]}$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal) (eq. 31.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)}$

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = Z[\mathcal{J}]$$

Fórmula de Dyson (eq. 31.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\mathcal{J}] + \mathcal{J} \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \underbrace{[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2]}_{\Delta^{-1}} \phi + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$

Note que:

$$-\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) = -\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + \underbrace{\frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{J} + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \phi}_{\mathcal{J} \cdot \phi} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} \right\} =$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi'}_{\phi' \quad (\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' + \mathcal{J} \cdot \phi' + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} \right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \int \mathcal{D}\phi' e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'} \quad (\text{eq. 30.1})$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi' e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'}}_{\langle 0|0 \rangle_0}$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \langle 0|0 \rangle_0 \quad (\text{eq. 32.1}) \quad Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle_0 = 1 \quad (\text{normalização})$$

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu \partial_\mu + m^2$

e portanto:
$$\Delta(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (\text{eq. 32.2})$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 28) leva a polos ($|p| = \pm i m$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \epsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i(\pi/2 - \epsilon)} p^0 = -i(p^0 + i\epsilon)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p}^2) + m^2 = -(p^0 + i\epsilon)^2 + (\vec{p}^2) + m^2 = -\underbrace{(p^0)^2}_{-p_\mu p^\mu} + (\vec{p}^2) + m^2 - i\epsilon = -p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$E \cdot x_E = p_\mu x_\mu + \vec{p} \cdot \vec{x} = (-i p^0)(i x^0) + \vec{p} \cdot \vec{x} \rightarrow -p_\mu x^\mu$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{p} \rightarrow -p_0 \end{matrix}$

$$\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = \mathcal{D}_F(t, \vec{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i p x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{eq. 32.3})$$

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\mathcal{J}\{\phi\}] = \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\mathcal{J}\{\phi\}]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

Note que: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\mathcal{J}\cdot\phi} = e^{\mathcal{J}\cdot\phi} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x) \right) = e^{\mathcal{J}\cdot\phi} \phi(x_1)$

$\mathcal{J}\cdot\phi = \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)$

$\frac{\delta \mathcal{J}(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x-x_1)$

Logo:

$$\langle 0|F[\mathcal{J}\{\phi\}]|0\rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)} \right)^4 \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + \mathcal{J}\cdot\phi} \Big|_{\mathcal{J}=0}$$

$Z_0[\mathcal{J}=0]$ → teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\langle 0|F[\mathcal{J}\{\phi\}]|0\rangle_{\mathcal{J}} = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[\mathcal{J}] \quad (\text{eq. 33.1})$$

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 31.3), temos:

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J}\cdot\phi} = \langle 0| e^{-\int d^4x V(\phi(x))} |0\rangle_{\mathcal{J}}$$

$F[\phi]$

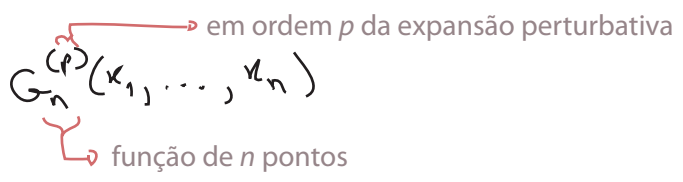
$$Z[\mathcal{J}] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[\mathcal{J}] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}} \quad (\text{eq. 33.2})$$

interação parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 33.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:



Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}[J] &= e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \\
 &= \left[1 - \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!} \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \dots \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \\
 &\equiv \mathbb{Z}_0[J] + \mathbb{Z}_1[J] + \mathbb{Z}_2[J] + \dots \quad (\text{eq. 34.1})
 \end{aligned}$$

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \mathbb{Z}_p[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{eq. 34.2})$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$\begin{aligned}
 G_1^{(0)}(x_1)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x, x') J(x') \right\} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ \delta^4(x-x_1) \Delta(x, x') J(x') + \underbrace{J(x) \Delta(x, x') \delta^4(x'-x_1)}_{\vdots} \right\} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \int d^4x \underbrace{\Delta(x_1, x) J(x)}_{(\Delta \cdot J)(x_1)} = \\
 &= (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}
 \end{aligned}$$

$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\int d^4x' \dots} = \int d^4x' \dots e^{\int d^4x' \dots}$

que, para $J=0$, é nula: $G_1^{(0)}(x_1) = 0$ (eq. 34.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J 's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J = 0$.

$$k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow G_{2k+1}^{(0)}(x_1, \dots, x_{2k+1}) = 0 \quad (\text{eq. 35.1})$$

A função de 2 pontos fica:

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[(\Delta \cdot J)(x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] =$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} (\Delta \cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4 x \Delta(x, x_2) J(x) = \int d^4 x \Delta(x, x_2) \delta(x - x_1) = \Delta(x_1, x_2)$$

$$= \Delta(x_1, x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1} \right) = \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1}$

$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}} = \left(\overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1} + \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \right) e^{\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}}$

$J = 0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) \leftrightarrow \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}$

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \left[\cancel{\Delta(x_1, x_2) (\Delta \cdot J)(x_3)} + \cancel{\Delta(x_2, x_3) (\Delta \cdot J)(x_1)} + \cancel{(\Delta \cdot J)(x_2) \Delta(x_1, x_3)} + \underbrace{(\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) (\Delta \cdot J)(x_3)}_0 \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

A próxima função não trivial é (exercício):

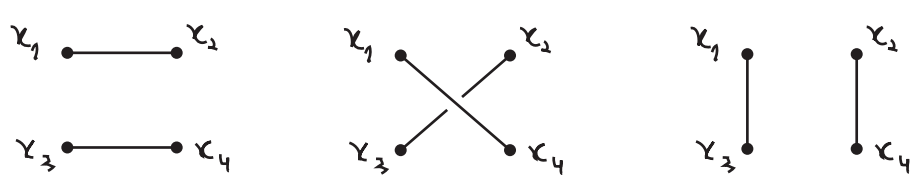
$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_3} \text{---} \overset{\circ}{x_1} \right] = \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_3} \text{---} \overset{\circ}{x_1}$$

$$G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} =$$

$$= \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_3, x_4) + \Delta(x_1, x_3) \Delta(x_2, x_4) + \Delta(x_1, x_4) \Delta(x_2, x_3)$$

(eq. 35.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que obtivemos na caso canônico:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas})$$

Em ordem λ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1[J] &= - \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = - \int d^4x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= -\frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \left[(\Delta \cdot J)(x) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = -\frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left[\Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^2(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= -\frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[\Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)(x) \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= -\frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 36.1}) \end{aligned}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de J , de forma que as funções de n pontos serão nulas para n par:

$$G_{2k}^{(1)}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \quad (\text{eq. 36.2})$$

A função de 1 ponto é dada por:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(x_1) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathbb{Z}_1[J] \Big|_{J=0} = -\frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[3 \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) + 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \Delta(x, x_1) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) (\Delta \cdot J)(x_1) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Big|_{J=0} = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) \end{aligned}$$

cujo diagrama é:

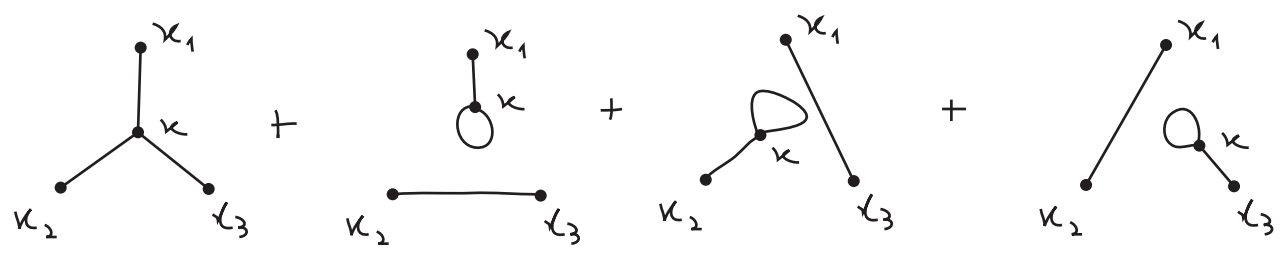


A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^d x \left\{ \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \frac{1}{2} \Delta(x, x) [\Delta(x, x_1) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_2)] \right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é:

$$Z_2[J] = + \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos J=0, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 z_3 d^3 z'_1 d^3 z'_2 d^3 z'_3 \times \right.$$

$$\left. \times J(z_1) \Delta(z_1, z'_1) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_2, z'_2) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_3, z'_3) J(z_3) \right\} \Big|_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3} \int d^d x d^d y \Delta(x, x) \Delta(x, y) \Delta(y, y) + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3!} \int d^d x d^d y \Delta^3(x, y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):



Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_a}} \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} = \text{EXP} \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \right] \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} \quad (\text{eq. 38.1})$$

eq. 33.2 → $Z[J] = e^{-\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)})} \left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:
 $J \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi_{cl} = 0$

\\ Demonstração //

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \quad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} \quad (\text{Lemma de Coleman}) \quad (\text{eq. 38.2})$$

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de F e G e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a \cdot x} \quad G(y) = e^{b \cdot y} \quad \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^m e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{b \cdot x} &= b_i e^{b \cdot x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n e^{b \cdot x} &= (b_i)^n e^{b \cdot x} \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = e^{a \cdot \frac{\partial}{\partial x}} e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} (a \cdot b)^m e^{b \cdot x} = e^{b \cdot (a+x)} = e^{a \cdot b} \quad \checkmark \text{OK!}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot \frac{\partial}{\partial y}} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)}$$

vetor $x = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{J}(x)$ } estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo
 vetor $y = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x)$ }

$$\hookrightarrow \boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right] G[\mathcal{J}] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \quad (\text{eq. 39.1})$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[\mathcal{J}] = \underbrace{e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}} \right\}}_{G[\mathcal{J}]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^4x V(\phi)} e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right\}}_{\left[F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}}_{\phi=0}$$

que é a eq. 38.1

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n Z[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \right|_{\mathcal{J}=0} = \frac{\delta^n}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\}_{\mathcal{J}=0} = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right\}_{\phi=0, \mathcal{J}=0}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ , qualquer termo que sobrar com J multiplicado vai ser nulo (quando $J=0$)

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi)} \right\}_{\phi=0} \quad (\text{eq. 40.1})$$

Em ordem N de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^4y_1 \dots d^4y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de Q campos ϕ , onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que Q derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que Q derivadas também (pois nesse caso sobram ϕ 's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo Q derivadas temos (e note Q deve ser obrigatoriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$$(Q = 2q = n + pN)$$

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{q! 2^q} \int d^4z_1 d^4w_1 \dots d^4z_q d^4w_q \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \Delta(z_1 - w_1) \frac{\delta}{\delta \phi(w_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(z_q)} \Delta(z_q - w_q) \frac{\delta}{\delta \phi(w_q)} \times$$

$$\times \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^4y_1 \dots d^4y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

(eq. 40.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^4z_i d^4w_i \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer: $\phi(x) \phi(y)$

$$\text{obtemos: } \int d^4z_i d^4w_i \left[\delta^4(x - z_i) \delta^4(y - w_i) \Delta(z_i - w_i) + \delta^4(y - z_i) \delta^4(x - w_i) \Delta(z_i - w_i) \right] =$$

$$= 2 \Delta(x - y)$$

como temos q fatores de 2 deste tipo, o 2^q em 40.2 é cancelado

O $q!$ é cancelado pelo fato de termos $q!$ formas de agir as $2q$ derivadas nos $2q$ campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novamente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam $q! 2^q$ ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos N variáveis de integração mudas cancela o $N!$ advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter p campos calculados no mesmo ponto introduz um $(p!)^N$ que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste $N!(p!)^N$ não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

$$S = \frac{N! (p!)^N}{(\# \text{ de diagramas equivalentes})}$$

Este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso $n = 0, p = 2, N = 2 (Q = 4, q = 2)$:

$$A = \frac{1}{2!2^2} \int d z_i d w_i d z_j d w_j d x d y \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(w_j)} \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y)$$

(não confundir o cancelamento destes com o de $N!$ e $p!^N$)

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:



Inocentemente teríamos $2!$ advindo das integrais em x e y e $(2!)^2$ advindo do fato de termos dois campos em x e dois em y , para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{8} \int d z_i d w_i d z_j d w_j d x d y \Delta(z_i - w_i) \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \times$$

$$\left\{ 2 \delta(x - w_j) \phi(x) \phi(y) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

ignoro os termos em que $\frac{\delta}{\delta \phi(z_j)}$ age em no mesmo campo em que agiu $\frac{\delta}{\delta \phi(w_j)}$ pois este contribuem para $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{smallmatrix} \right)$

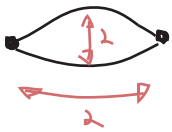
$$= \frac{1}{4} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \left\{ 2 \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \phi(x) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \times$$

$$x \left\{ \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \left[\delta(x - w_i) \phi(y) + \delta(y - w_i) \phi(x) \right] + \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \left[\delta(w_i - x) \phi(y) + \delta(w_i - y) \phi(x) \right] \right\} =$$


$$= \frac{1}{2} \int \dots \int \Delta \Delta \left\{ \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(x-w_i) \delta(y-z_i) + \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(y-w_i) \delta(x-z_i) + \right. \\ \left. + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-x) \delta(y-z_i) + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-y) \delta(z_i-x) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \ 4 \Delta^2(x-y) = 2 \int d^4x d^4y \ \Delta^2(x-y)$$

O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



(mais uma vez há uma outra forma de olhar diagramas para obter o fator de simetria na pg 94 do Nastase)

Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclideoano):

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = \Delta(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2}$
- (2) para cada vértice:  $= (-i\lambda_p) \int d^4y$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 42.1)

Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pg 30:

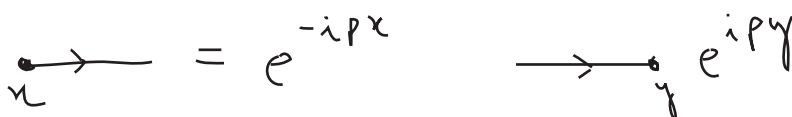
$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \underbrace{G(p_1, \dots, p_n)}_{\text{satisfazem conserv. de momento}}$$

O propagador Euclideoano é:

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2+m^2} \quad \therefore \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2+m^2} \quad (\text{eq. 42.2})$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento (lembrando que estamos no Euclideoano

e $p_\mu \cdot x^\mu = -p_E \cdot x_E$):



Como derivamos as regras no espaço dos momentos a partir das regras no espaço das posições, e já mostramos que estas são as mesmas obtidas na quantização canônica, não há novidade alguma aqui.

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice r :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi_1, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

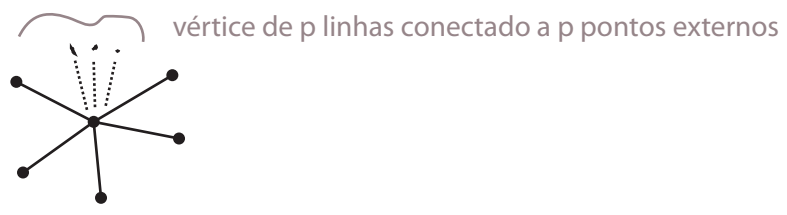
Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{\pi_1, \dots, \pi_p} = \int d^d z \underbrace{A_{\pi_1, \dots, \pi_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{\pi_1}(z) \cdots \phi_{\pi_p}(z)}_{\text{não há soma subentendida!}}$$

Interação envolvendo p campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_i\}}$, esta interação colocará p campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com p linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice

é considerar a função com p pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 40.1 para 40.2. A generalização de 40.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{x_1}(x_1) \dots \phi_{x_n}(x_n) e^{-\int d^4z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p}} \right\}_{\phi=0}$$

→ a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice ($N = 1$) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos ($n = p$):

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{x_1}(x_1) \dots \phi_{x_p}(x_p) (-) \int d^4z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p} \right\}_{\phi=0}$$

→ o produto escalar tem integrais: $\int d^4y_1 d^4y_2 \frac{\delta}{\delta \phi(y_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(y_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 40, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = \int d^4y_1 \dots d^4y_p \Delta_{rs}(x_1 - y_1) \dots \Delta_{rs}(x_p - y_p) \times$$

$$\times (-) \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(y_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

→ Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias $\lambda \phi^p$, obtemos (veja pag 40)

$$\int d^4z \lambda \delta(y_1 - z) \dots \delta(y_p - z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas

$$\text{Diagrama com p linhas} = - \int d^4 x_1 \dots d^4 x_p e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_p x_p)} \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

a menos de um fator $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_p)$

(eq. 45.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_{\Gamma} = \frac{\lambda_4}{4!} \int d^4 x \phi^4(x)$$

$$\text{Diagrama com 4 linhas} = - \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \int d^4 x \phi^4(x) \right] =$$

$$= \frac{\lambda_4}{3!} \int d^4 x \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} \phi^3(x) \delta(x-x_4) = \frac{\lambda_4}{2!} \int d^4 x \frac{\delta}{\delta \phi(x_3)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} \phi^2(x) \delta(x-x_4) \delta(x-x_3) = \dots$$

$$= - \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 d^4 x e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \lambda_4 \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \delta(x-x_3) \delta(x-x_4) =$$

$$= - \lambda_4 \int d^4 x e^{i x(k_1 + \dots + k_4)} = - (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_4) \lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 9.5; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Passaremos rapidamente pela quantização de campos fermiônicos, uma vez que as principais ideias já foram cobertas na lista de exercícios. Estamos usando as seguintes convenções:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Representação Quiral ou de Weyl}$$

(eq. 45.2)



$$\begin{aligned} (\gamma^0)^{\dagger} &= \gamma^0 \\ (\gamma^i)^{\dagger} &= -\gamma^i \end{aligned} \quad \text{(eq. 45.3)}$$

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$$

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2:

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i) \quad (\text{eq. 46.1})$$

De forma a re-escrever 45.2 na forma compacta:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 46.2})$$

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \longrightarrow \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 46.3})$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{eq. 46.4})$$

Com isto podemos construir uma ação:

$$S_\psi = \int d^4x \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (\text{eq. 46.5})$$

$$\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$(i \not{D} - m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 46.7})$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ .

queremos prosseguir da mesmo forma que no caso escalar, rodando para o espaço Euclidiano e fazendo a integral de trajetória.

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^2 = -1$$

$$\gamma_E^0 = \gamma^0 \quad \hookrightarrow (\gamma_E^i)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_E^i = -i \gamma^i$$

$$\rightarrow \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^1$$

$$\Psi_E(x_E) = \Psi(-i t_E, \vec{x})$$

E, nesta representação: $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$

$$\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\Psi}_E (\not{D} + m) \Psi_E \quad (\text{eq. 46.8})$$

$x^0 = -i x^1 \quad d_0 = \frac{d}{dx^0} = \frac{d}{-i dx^1} = i d_1$

$$\begin{aligned} S &= i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi = i \int d^4x \psi^\dagger \gamma^0 (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ &= i \int d^4x_E \psi^\dagger(-i t_E, \vec{x}) \gamma^1 (i \gamma_E^\mu \partial_\mu + i (i \gamma_E^i) \partial_i - m) \psi(-i t_E, \vec{x}) \\ &= \int d^4x_E \psi^\dagger(-i t_E, \vec{x}) \gamma^1 (-\gamma_E^0 \partial_0 - \gamma_E^i \partial_i - m) \psi(-i t_E, \vec{x}) \\ &= \int d^4x_E \underbrace{\psi^\dagger(-i t_E, \vec{x})}_{\Psi_E^\dagger(x_E)} \underbrace{\gamma^1 (-\gamma_E^\mu \partial_\mu - m)}_{\Psi_E(x_E)} \underbrace{\psi(-i t_E, \vec{x})}_{\Psi_E(x_E)} = - \int d^4x_E \bar{\Psi}_E (\not{D} + m) \Psi_E \end{aligned}$$

Temos que tomar um cuidado adicional, pois queremos preservar a anticomutação entre campos fermiônicos na integral de trajetória:

$$\langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_3) \dots \hat{\psi}(x_n) \} | 0 \rangle = - \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_3) \dots \hat{\psi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{iS} \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \dots \psi(x_n) = - \int D\bar{\psi} D\psi e^{iS} \psi(x_2) \psi(x_1) \psi(x_3) \dots \psi(x_n)$$

tem duas integrais pois o campo é complexo, no caso do campo escalar complexo teríamos $\int \bar{\psi}^* \psi \phi$

não há como essa igualdade funcionar se estes cara forem funções complexas.

Fica claro que as funções que aparecem dentro das integrais fermiônicas não são as funções ou números usuais, pois têm que anticomutar (seguem a chamada **Álgebra de Grassmann**). Podemos dividir o conjunto destes **Números de Grassmann** em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a, a^+ : \{a, a^+\} = \{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$

Parte par da álgebra: $aa^+ : [aa^+, aa^+] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par) (e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

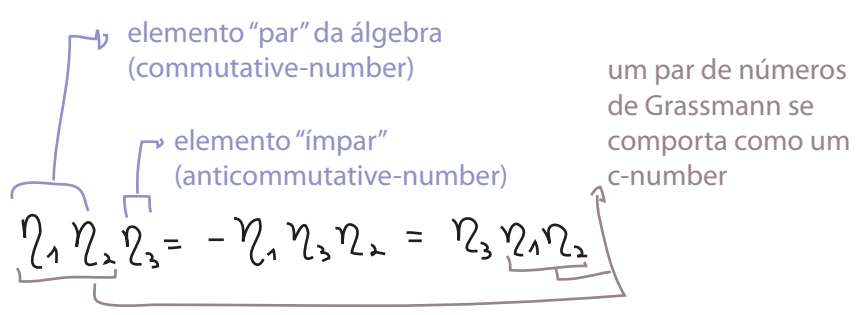
(O mesmo raciocínio está mais detalhado no curso de campos I de 2017 - pgs 132 em diante)

Precisamos de funções definidas em um espaço de **números complexos que anti-comutem**, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0$$

O que tem diversas consequências:

$$\theta^2 = 0 \quad (\text{eq. 47.1})$$



$$f(\theta, \eta) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta + a_4\theta^2\eta + a_5\theta\eta^2$$

assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann) Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de θ, η e ρ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta, \eta, \rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho + a_7\theta\eta\rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\overset{L}{D}}{\partial \theta} f(\theta, \eta) = a_1 + a_3 \eta \quad \frac{\overset{R}{D}}{\partial \theta} f(\theta, \eta) = a_1 - a_3 \eta$$

Definiremos: $\frac{D}{d\eta} = \frac{\overset{L}{D}}{d\eta}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{D}{d\eta} (\eta f) = f - \eta \frac{Df}{d\eta}$$

os operadores diferenciais também são ímpares sobre a álgebra:

$$\left\{ \eta_i, \frac{D}{d\eta_j} \right\} = \delta_{ij} \quad (\text{eq. 48.1})$$

$$\left\{ \frac{D}{d\eta}, \frac{D}{d\theta} \right\} = 0 \quad (\text{eq. 48.2})$$

decorre que:

$$\frac{D}{d\theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k e^{\sum \theta_i \eta_i} \quad \frac{D}{d\eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

Para definir integrais é natural assumir que os "infinitesimais" de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta d\eta f(\theta, \eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta f(\theta, \eta) \right]$$

E para que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\int d\theta = 0 \quad (\text{eq. 48.3})$$

$$\int d\theta \theta = 1 \quad (\text{eq. 48.4})$$

$$\int d\theta f(\theta, \eta) = \int d\theta (a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta) = a_1 + a_3 \eta = \frac{D}{d\theta} f(\theta, \eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida:

$$\delta(\eta - P) = \eta - P \quad (\text{eq. 49.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \int d\eta (\eta - P) &= \int d\eta \eta - \int d\eta P = 1 \\ \int d\eta (\eta - P) \eta &= \int d\eta \eta \eta - \int d\eta P \eta = P \end{aligned} \right\} \int d\eta \delta(\eta - P) g(\eta) = \int d\eta (\eta - P) (a + b\eta) = a + bP = g(P)$$

$g(\eta) = a + b\eta$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx x = 1 \quad y = ax \quad \int dy y = 1 = a \int dy x \quad \boxed{dy = \frac{1}{a} dx} \quad (\text{eq. 49.2})$$

Para números de Grassmann complexos:

$$(\Theta \eta)^* \equiv \eta^* \Theta^* = -\Theta^* \eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta \eta = \int d\eta^* \eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^* \Theta \eta} = 1 - \eta^* \Theta \eta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \Theta \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \Theta \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 + \eta \eta^* \Theta) = \Theta$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \Theta \eta} = \Theta} \quad (\text{eq. 49.3})$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \Theta \eta} = \frac{1}{\Theta} \cdot \Theta} \quad (\text{eq. 49.4})$$

$$\dots \left\{ \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \Theta \eta} = \frac{d}{d\Theta} \int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \Theta \eta} \right.$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de variáveis complexas:

$$\boxed{\int \frac{d z^*}{(2\pi i)^2} \int \frac{d z}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-z^* \cdot b z} = \frac{1}{b}} \quad (\text{eq. 49.5})$$

$$\boxed{\int \frac{d z^*}{(2\pi i)^2} \int \frac{d z}{(2\pi i)^{1/2}} z^* z e^{-z^* \cdot b z} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b}} \quad (\text{eq. 49.6})$$

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = (\eta_1^* \quad \eta_2^*) \quad \delta\bar{\eta} \delta\eta \equiv \delta\eta_1^* \delta\eta_1 \delta\eta_2^* \delta\eta_2$$

$$(\bar{\eta} \eta)^2 = (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)^2 = \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 = 2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 - \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$\int \delta\bar{\eta} \delta\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 \quad (\text{eq. 50.1})$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\eta = M \alpha \quad M, N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2) (M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) =$$

$$= (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 = \text{DET}[M] \alpha_1 \alpha_2$$

Então, se queremos que: $\int \delta\eta_1 \delta\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$

temos que exigir: $\delta\eta_1 \delta\eta_2 = (\text{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$

$$\delta\eta_1^* \delta\eta_2^* = (\text{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* d\alpha_2^*$$

então:

$$1 = \int \delta\eta_1^* \delta\eta_1 \delta\eta_2^* \delta\eta_2 e^{-\bar{\eta} \eta} = \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_2^*}{\text{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\text{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\text{DET}[\underbrace{NM}_N]} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 e^{-\bar{\alpha} \underbrace{NM}_A \alpha}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = \text{DET}[A] \quad (\text{eq. 50.2})$$

Note que integração de Gaussiana com números de Grassmann está nos dando o Det ao invés de 1/Det que tínhamos com números complexos.

Usando derivadas em a , podemos também mostrar que:

$$\int \prod_i d\bar{x}_i d x_i \alpha_i \bar{x}_j e^{-\bar{x} \cdot A x} = (A^{-1})_{ij} \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 51.1})$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor x , fornece um a -number)

como:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

$\left\{ \phi_i \right\}$ base de funções usuais ($\phi_i \in \mathbb{C}$)
 \rightarrow coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} \cdot A \psi} = \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 51.2})$$

O Campo Fermiônico

Conforme mostrado em exercício o oscilador harmônico fermiônico, na presença de fontes:

$$H(b^+, b; t) = \omega b^+ b - b^+ \eta(t) - \bar{\eta}(t) b \quad \left\{ \hat{b}, \hat{b}^+ \right\} = 1$$

pode ser descrito via uma integral de trajetória em termos de números de Grassmann, e obtem-se:

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} ds e^{i\omega(\tau-s)} \bar{\eta}(\tau) \eta(s) \right\} \quad (\text{eq. 51.3})$$

Isto é praticamente o mesmo que um campo em 0+1 dim., temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\underbrace{\bar{\psi} (i \partial_t - \omega) \psi}_{\mathcal{D}_F^{-1} = -i(i \partial_t - \omega)} + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt \left[-\bar{\psi} \mathcal{D}_F^{-1} \psi \right] + i \int dt \left[\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{Z}[0, 0] \exp \left\{ - \int ds d\tau \bar{\eta}(s) \mathcal{D}_F(s, \tau) \eta(\tau) \right\} \quad (\text{eq. 51.4})$$

$$D_F(s, \bar{z}) = \left[-i \left(i \partial_t - \omega \right) \right]^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\bar{z})}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s - \bar{z}) e^{-i\omega(s-\bar{z})} \quad (\text{eq. 52.1})$$

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ($\text{Im } E > 0$) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-\bar{z}) \sim \text{Im}(E)(s-\bar{z})$$

(3) Basta substituir a última expressão em 52.1 para obter 51.3 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclidiano: $\tau = -i t_E$

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \text{ Exp} \left\{ \int dt_E \bar{\psi}_E (-\partial_{t_E} - \omega) \psi_E + \int dt_E \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0, 0] \text{ Exp} \left\{ \int dz ds \bar{\eta}(s) D(s, \bar{z}) \eta(\bar{z}) \right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi} \cdot D^{-1} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi \quad (\text{eq. 52.2})$$

$$D[s, \bar{z}] = (\partial_t + \omega)^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\bar{z})}}{E + i\omega} \quad (\text{eq. 52.3})$$

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon) E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 52.1

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo.

Como já vimos em 46.8, no espaço Euclidiano temos: $\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\psi}_E (\not{\partial} + m) \psi_E$

A função de partição obtida é:

$$Z_F^{(E)}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \text{ Exp} \left\{ - \int d^4x \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi + \int d^4x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right\} = \quad (\text{eq. 52.4})$$

Atenção para o índice Espinorial:
 $\int d^4x \bar{\eta} \Psi = \int d^4x \bar{\eta}_\alpha(x) \Psi_\alpha(x)$
 $\alpha = 1, 2, 3, 4$
 $\bar{\eta} (\not{x} + m)^{-1} \eta = \int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x) (\not{x} + m)^{-1}_{\alpha\beta} \eta_\beta(y)$

$$Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta] = Z(0,0) e^{\bar{\eta} (\not{x} + m)^{-1} \eta}$$

$$S_F(x, y) = (\not{x} + m)^{-1} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + i m} \quad (\text{eq. 53.1})$$

$$(\not{x} + m) S_F(x, y) = \delta^4(x-y)$$

Usaremos com frequência a seguinte relação:

$$\frac{1}{-\not{p} + i m} = \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2} = \frac{-\cancel{p}_{\alpha\beta} - i m \uparrow_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$$

$p^2 = p^\mu p_\mu$

Voltando para Minkowski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x, y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + i m} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2} e^{i p \cdot (x-y)}$$

$$p_E^0 \gamma_E^0 = -i p^0 \gamma^0 = p^0 \gamma_0$$

$$t_E = i t \quad p_E^0 = (-i + \epsilon) p^0 \quad p_E^2 + m^2 = -p^2 + m^2 - i \epsilon$$

$$\not{p}^E = \gamma_E^0 p_E^0 + \gamma_E^i p_E^i = \gamma^0 (-i + \epsilon) p^0 - i \gamma^i p^i = -i \gamma^0 p^0 - i \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \epsilon \gamma^0$$

$$S_F^{(M)}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i [p^0(x^0 - y^0) + p^i(x^i - y^i)]} \frac{+i \gamma^0 p^0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - i m}{-p^2 + m^2 - i \epsilon} =$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i \epsilon} \quad (\text{eq. 53.2})$$

$p_0 \rightarrow -p_0$

Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar ϕ (com fonte J) e um férmion ψ , interagindo por meio de um termo $\int_{\mathbb{R}^4} [\bar{\psi}, \psi, \phi]$, neste caso poderíamos escrever:

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I[-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta] Z_\phi^{(0)}[J] \quad (\text{eq. 54.1})$$

que é obtida segundo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 33. A única diferença está no termo $-\frac{\delta}{\delta\eta}$ que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma: $\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$

Logo: $\psi e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta} = -\frac{\delta}{\delta\eta} e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta}$

O lema de Coleman (eq. 38.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$F\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta}, \eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right] \left(F(\bar{\psi}, \psi) e^{\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi} \right)_{\bar{\psi}=\psi=0} \quad (\text{eq. 54.2})$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta} S_F \eta} Z_\phi^{(0)}[J] =$$

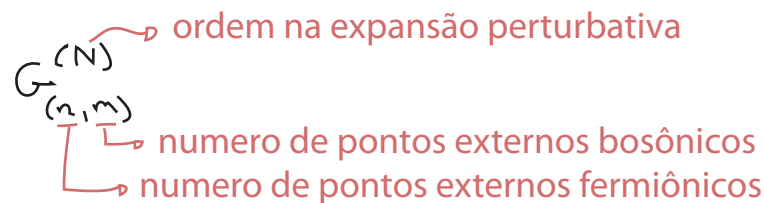
$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \frac{\delta}{\delta J}) + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} Z_\phi^{(0)}[J] \Big|_{\psi=\bar{\psi}=J=0} =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \phi) + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J \cdot \phi} \right\}_{\psi=\bar{\psi}=\phi=0} \quad (\text{eq. 54.3})$$

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g \bar{\psi} \psi \phi$$

As funções de Green da teoria serão nomeadas:



A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G_{(2,1)}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta\eta^{(x)}} \left(-\frac{\delta}{\delta\eta^{(y)}} \right) \frac{\delta}{\delta J(y)} e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\psi} \psi \phi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J \cdot \phi} \right\}_{\psi=\bar{\psi}=\phi=0, \eta=\bar{\eta}=J=0}$$

índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \underbrace{e^{-g \int d^4w \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(w)}}_{\text{só quero o termo } O(g^1)} \right\} =$$

só quero o termo $O(g^1)$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} (-g) \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \int d^4w \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(w) =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_1)} S_F(z_1 - z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2 - y) \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}(w) \psi(w) + \psi(x) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \delta_{\beta\alpha} \psi(w) \right] =$$



Não quero o diagrama de bolha no vácuo:

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-S_F(z_1 - z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2 - y) \bar{\psi}(w) \delta(z_1 - w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta(x - z_1) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \psi(w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] + \text{BOLHAS}$$

$$= +S_F(w - y)_{\beta\alpha} \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w)_{\alpha\beta} \bar{\psi}(y) \psi(w) + \text{BOLHAS}$$

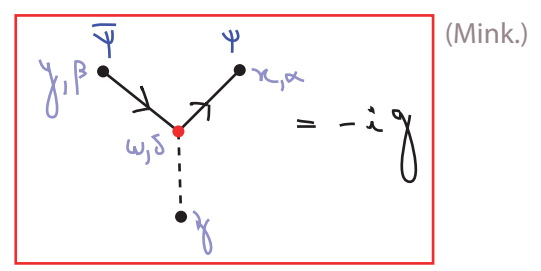
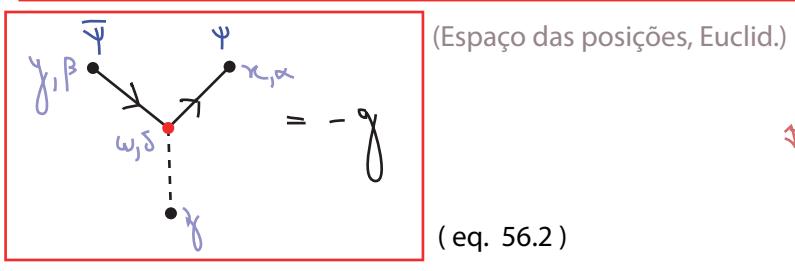
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)} S_F(z_3 - z_4) \frac{\delta}{\delta\psi(z_4)} \right) \left[+S_F(w - y) \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w) \bar{\psi}(y) \psi(w) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3 - z_4) \right) \left[-S_F(w - y) \psi(x) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \psi(w) \right] =$$

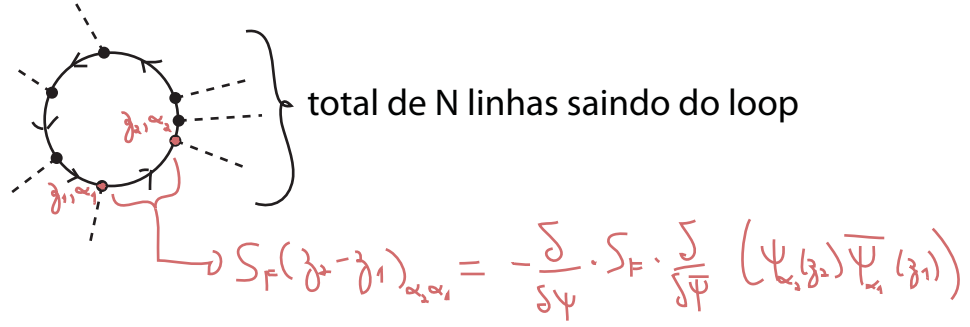
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3 - z_4) \right) \left[-S_F(w - y) \delta(x - z_3) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \delta(w - z_3) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left[S_F(x - w)_{\alpha\beta} S_F(w - y)_{\beta\alpha} + S_F(w - y)_{\beta\alpha} S_F(x - w)_{\alpha\beta} \right] =$$

$$G_{(2,1)}^{(1)} = -g \int d^4\omega \Delta(\gamma-\omega) S_F(x-\omega) S_F(\omega-\gamma) \quad (\text{eq. 56.1})$$



A importância do ordenamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \left((\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_N \right) \leftrightarrow (\bar{\psi} \psi)_i = \bar{\psi}(z_i) \psi(z_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem $\bar{\psi} \psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(z_N - z_1)_{\alpha_N \alpha_1} S_F(z_1 - z_2)_{\alpha_1 \alpha_2} \dots S_F(z_{N-1} - z_N)_{\alpha_{N-1} \alpha_N} = \text{Tr} \left[S_F(z_1 - z_2) \dots S_F(z_{N-1} - z_N) \right]$$

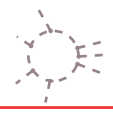
(loops de férmions geram traços)

temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left((\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_N \right) = -\psi(z_N) (\bar{\psi} \psi)_1 \dots (\bar{\psi} \psi)_{N-1} \psi_N(z_N)$$

passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices $(-g)^N$, temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria $\lambda \phi^3$ não tem sinal algum além do que vem dos vértices.



Regras de Feynman para interação de Yukawa:

(Espaço das posições, Euclid.)

$$S_F(x-\gamma)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{iP(x-\gamma)}}{-\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta} \quad (\text{direção é importante})$$

(multiplico por -1^L , onde $L = \#$ loops fermiônicos)
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

(eq. 56.3)

Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Nastase II 11 e 12, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao "mundo bosônico" para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os **Bósons de Gauge**. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\nu(x) \rightarrow A_\nu(x) - \frac{1}{\bar{e}} \partial_\nu \lambda(x) \quad (\text{no caso de uma simetria } U(1), \text{ abeliana})$$

\bar{e} constantes de acoplamento

$$A_\nu^a(x) \rightarrow A_\nu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\nu \lambda^a(x) + f^{abc} A_\nu^b \lambda^c(x) \quad a, b, c \rightarrow \text{índices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até \#Geradores do Grupo)}$$

f^{abc} constantes de estrutura do grupo

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Estou pensando em uma teoria invariante sobre um grupo de transformações internas (que misturam graus de liberdade do campo e não são transformações do espaço tempo). Os elementos do grupo tem uma forma infinitesimal:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \rightarrow [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (= \text{zero no caso abeliano})$$

geradores álgebra do grupo

Os férmions e escalares da teoria vão se transformar em alguma representação do grupo:

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha^a T^a} \Psi$$

matrizes que satisfazem álgebra do grupo, ex:

- $SU(2)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (nucleons em física nuclear)
- $SU(3)$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (pions)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}\phi \ e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi) dx} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{-i \int dx \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \phi J \right]} = \\ &= \text{EXP} \left[-\frac{i}{2} \int dx dy \ J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}A_\mu \ e^{i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) = \int d^4x \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \int d^4x A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x g_{\mu\nu} A^\mu \square A^\nu$$

$$\int d^4x (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) = \int d^4x \partial_\nu (A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \int d^4x A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = - \int d^4x A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu \quad (\text{eq. 58.1})$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad (\text{eq. de Maxwell})$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) \partial^\mu \alpha = (\square \partial_\nu - \partial_\nu \square) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \right\}$$

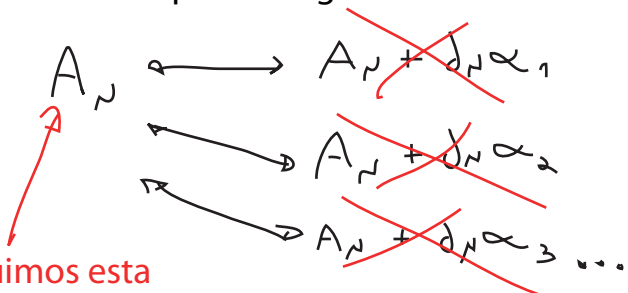
vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

(tem que ser realmente grande para satisfazer isto)

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



já incluímos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é **fixar o gauge**, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclideano. É preciso atentar para o fato de que A_μ é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$\chi_0 = \chi^0 = t = -i \chi_4 = -i \chi^4 \quad \partial_0 = \frac{d}{dx^0} = i \frac{d}{dx^4} = i \partial_4$$

$$A_0 = i A_4 \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$E_i^{(m)} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i \partial_4 A_i - i \partial_\mu A_4 = i F_{4i} \equiv i E_i^{(E)} \quad F^{0i} = -i F^{4i} \quad (\text{eq. 59.2})$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(m)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} F_{4i} F^{4i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(\mu\nu)}$$

$$\int d^4x \mathcal{L}_{EM}^{(m)} = \int d^4x_E \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(\mu\nu)} \right) = - \int d^4x_E \underbrace{\left(F_{\mu\nu}^{(E)} \right)^2}_{\mathcal{L}_{EM}^{(E)}}$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(E)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \left[\left(E_i^{(E)} \right)^2 + \left(B_i^{(E)} \right)^2 \right] \quad (\text{eq. 75.3})$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 58.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu \left(\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\nu \partial_\mu \right) A_\nu \right]$$

A idéia agora é que em: $Z = \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{-S_{EM}[A]}$

temos duas "somadas":

- (1) uma desejável, sobre todas as configurações **fisicamente inequivalentes** do campo A_μ que criam o comportamento quântico do campo
- (2) uma soma igual a anterior só que com todas as configurações levadas em outras **fisicamente equivalentes** por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge λ específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de λ , o que acaba virando uma integral em λ .

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas: $\int \mathcal{D}A_\mu(x) = \int d\lambda \int \mathcal{D}A_\mu^{GF}(x)$

integral para os diversos "Gauges" ←

integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados) ←

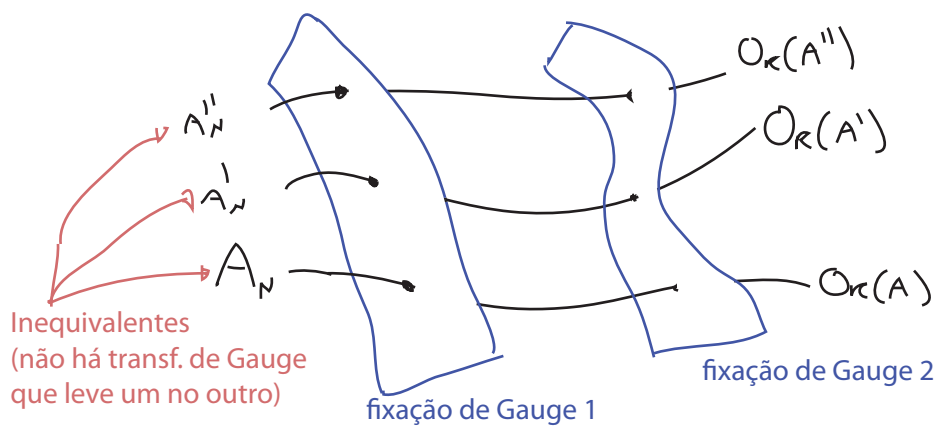
e eliminarmos toda dependência em λ da integral de trajetória, então a integral em λ vira um fator multiplicativo em Z , completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo de Gauge). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\partial_\mu A_\mu = C(x) \quad (\text{eq. 60.1})$$

Dada uma configuração de campo específica A_μ , definamos a **órbita de A_μ** , $Or(A)$, como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de A_μ por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e $Or(A)$ (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abelianas e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow \chi A_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (\text{eq. 60.2})$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \chi A_\mu &= \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \chi(x) \\ \partial^\mu \chi A_\mu &= C \end{aligned}$$

a forma:
$$\chi(x) / \delta^2 \chi(x) = -\partial_\mu A_\mu(x) + C(x) \quad (\text{eq. 60.3})$$

É a transformação que nos coloca exatamente na intersecção de $Or(A)$ com a fixação 60.1.

Queremos então provar o seguinte:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta(-\partial_\mu (\chi A_\mu(y)) + C(y)) = \frac{1}{\text{DET}(-\delta^2)} \quad (\text{eq. 60.4})$$

porque se isso for verdade, teremos encontrado uma identidade:

$$1 = \text{DET}(-\partial^2) \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta[-\partial_\nu \chi A_\nu + c] \quad \leftarrow \text{"}\delta \text{ funcional"} \text{ no sentido em que a derivada de } \chi A \text{ tem que ser } c \text{ para qualquer ponto } y$$

$$1 = \text{DET}(-\partial^2) \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta\left(-\partial_\nu(\chi A_\nu(y)) + c(y)\right) \quad (\text{eq. 61.1})$$

que pode ser inserida dentro da integral de trajetória de A e impõe, **por meio desta δ** , a condição 60.1 para qualquer valor de χ .

——— // Demonstração // ———

$$-\partial_\nu(\chi A_\nu) + c = -\partial^2 \chi - \partial_\nu A_\nu + c = -\partial^2 \chi + \partial^2 \chi^{(c)}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis na integral em χ : $\chi \rightarrow \chi' = \chi - \chi^{(c)}$

$$d\chi' = d\chi \quad -\partial^2(\chi - \chi^{(c)}) = -\partial^2 \chi'$$

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial_\nu(\chi A_\nu(y)) + c(y)\right] = \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi'(x) \int \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial^2 \chi'(y)\right]$$

$G(\chi A_\nu)$

Note que, dado o vínculo:

$$G(\chi A_\nu(y)) \equiv -\partial_\nu \chi A_\nu + c = -\partial^2 \chi(y) - \partial_\nu A_\nu(y) + c(y)$$

$$\frac{\delta G(\chi A_\nu(y))}{\delta \chi(x)} = -\partial^2 \delta(x-y) \equiv -\partial^2(x,y)$$

Mostrando que este operador $-\partial^2(x,y)$ age como elemento de matriz do Jacobiano de uma mudança de variáveis:

$$\chi \rightarrow G(\chi A_\nu)$$

O que é uma versão contínua de:

$$\int \prod_{i=1}^n d\chi_i \int \prod_{j=1}^n \delta(\Delta_{ij} \chi_j) = \int d^n \chi \underbrace{S^n(\Delta \vec{\chi})}_{\vec{\eta} = \Delta \vec{\chi}} = \int d^n \eta \frac{S^n(\vec{\eta})}{\text{DET}(\Delta)} = \frac{1}{\text{DET}(\Delta)}$$

$\eta_i = \Delta_{ij} \chi_j \rightarrow d^n \eta = \text{DET}(\Delta) d^n \chi$

Portanto:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \mathcal{D}\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \mathcal{D}\left[-\partial^2 \chi(y)\right] = \frac{1}{\mathcal{D}_{ET}(-\partial^2)}$$

que é o que queríamos demonstrar

Podemos então, a partir da identidade 61.1, obter uma outra, integrando sobre as condições de Gauge (com um peso gaussiano):

$$\underbrace{N(\alpha)}_{\text{garante a identidade}} \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} = 1$$

$$N(\alpha) \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \ \mathcal{D}\left[-\partial_\nu \chi A_\nu + c(y)\right] = 1$$

$$\int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) = 1 \quad (\text{eq. 62.1})$$

Podemos então inserir a identidade 62.1 dentro de qualquer integral de trajetória em A:

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2}$$

Não depende de A. Este passo, aparentemente inofensivo, é onde está uma das grandes diferenças entre teorias abelianas e não abelianas. Para uma teoria não abeliana este $\mathcal{D}_{ET}[\delta G / \delta \chi]$ vai depender de A e não poderá ser tirado da integral de trajetória. Neste caso seríamos forçados a reescrevê-lo como uma integral de gaussiana, ou seja, mais um termo quadrático seria adicionado a ação. É dessa forma que nascem os fantasmas de Fadeev-Popov (como veremos em breve)

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) N(\alpha) \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{O}[A]$$

Fazemos uma mudança de variáveis em A: $A \rightarrow A - \partial_\mu \chi$
 $\partial_\mu \chi A_\nu \rightarrow \partial_\mu A_\nu$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então: $S[A] \rightarrow S[A]$

e vamos assumir que $O[A]$ também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável): $O[A] \rightarrow O[A]$

$$\therefore \int \mathcal{D}A e^{-S[A]} O[A] = \mathcal{D}_{\text{ET}}(-\partial^2) N(\epsilon) \left(\int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu(x))^2} O[A] \quad (\text{eq. 63.1})$$

Não há mais nada dependendo de χ , logo esta integral é só um número (infinito).

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todas as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle O[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S[A]} \uparrow}{\int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \uparrow} = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}$$

Onde:

$$S_{\text{EFF}}[A] \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\nu)^2}_{S_{\text{GF}} \text{ (Gauge Fixing)}} \quad (\text{eq. 63.2})$$

O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{\text{EFF}} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right] - \underbrace{\frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{eq. 63.3})$$

$(G^{(0)})_{\mu\nu}^{-1}(x)$ (que agora é inversível)

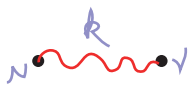
$$S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4k A_\mu(k) e^{ikx} \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \int d^4x' A_\nu(x') e^{ik'x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4k d^4k' \delta^4(k+k') A_N(k) \left[+\delta_{\mu\nu} k'^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k'_\mu k'_\nu \right] A_\nu(k') =$$

$$S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4k A_N(-k) \underbrace{\left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right]}_{G^{(0)-1}(k)_{\mu\nu}} A_\nu(k) \quad (\text{eq. 64.1})$$

Finalmente:

$$\left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (\text{Moment., Euclid.})$$


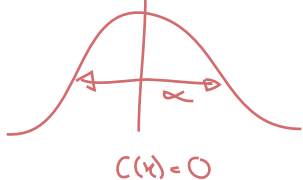
(eq. 64.2)

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

$$G^{(0)}_{\mu\nu}(k; \alpha=1) = \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Moment., Euclid., Gauge de Feynman})$$

(eq. 64.3)

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

$$e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x C^2(x)}$$


$C(x) = 0$

Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

Assim como no caso Abeliano, temos um problema com a soma sobre configurações equivalentes. Agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A_\mu^M = A_\mu^a t^a \iff A_\mu^{M'} = (A_\mu^a)^{M'} t^a = e^{i\chi^a t^a} \left[A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] e^{-i\chi^a t^a}$$

$SU(2)$
 $t^a = \sigma^a$

$$A_\mu^M = A_\mu^1 \sigma^1 + A_\mu^2 \sigma^2 + A_\mu^3 \sigma^3 = \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - i A_\mu^2 \\ A_\mu^1 + i A_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Podemos definir uma identidade idêntica à 60.4:

$$1 = \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \, \text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] \quad (\text{eq. 65.1})$$

\swarrow Vínculo: $G(A_\mu^{\chi}) = 0$
 \searrow Para o vínculo que lá usamos (pg 61):

$$\text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] = \text{DET} [-\partial^2]$$

Não precisamos fixar o vínculo, apenas assumir que ele é linear em χ :

$$\text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\mu^{\chi})}{\delta \chi} \right] \equiv \Delta_G[A_\mu^{\chi}] = \Delta_G[A_\mu^{\chi}]$$

\uparrow não dep. de χ (invariante de gauge) (eq. 65.2)

e podemos tirar o determinante da integral em 65.1:

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu^{\chi}] = \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \quad (\text{eq. 65.3}) \quad (\text{compare com 60.4})$$

Inserindo a identidade 65.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu^{\chi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \int \mathcal{D}\chi \, \delta(G(A_\mu^{\chi})) \Delta_G[A_\mu^{\chi}] =$$

\uparrow note que estamos em Minkowski
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{(invariante de gauge)}}$

$$= \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A_\mu^{\chi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \delta(G(A_\mu^{\chi})) \Delta_G[A_\mu^{\chi}]$$

Podemos então fazer uma mudança de variáveis em A, que é a transformação de gauge que leva

$$A_\mu^{\chi} \rightarrow A_\mu^{\chi}$$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor A^a , então:

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A_\mu^{\chi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \delta(G(A_\mu^{\chi})) \Delta_G[A_\mu^{\chi}]$$

$\underbrace{\hspace{10em}} \rightarrow$ Nada na integral em A depende de χ , isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano, para uma fixação de gauge genérica:

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\nu(x) - w(x) \Rightarrow G(A_\mu^x) = \partial^\mu A_\nu + \partial^\mu \chi - w$$

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \frac{\delta G}{\delta \chi} = \frac{\delta}{\delta \chi} (\partial^\mu \chi)$$

$\Delta_G[A_\mu]$ também independe de A e pode ser tirado da integral e ignorado (outro fator multiplicativo)

Agora temos:

$$G(A_\mu^x) = \partial^\mu A_\nu^x(x) - w^x(x) \Rightarrow G(A_\mu^x) = \partial^\mu \left(A_\nu^a + \frac{1}{g} \partial_\nu \chi^a + f^{abc} A_\nu^b \chi^c \right) - w^a(x)$$

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \frac{\delta G}{\delta \chi^a} = \frac{\delta}{\delta \chi^a} \left(\frac{1}{g} \partial^\mu \partial_\nu \chi^a + \partial^\mu \underbrace{f^{abc} A_\nu^b \chi^c}_{\text{Agora } \Delta_G[A_\mu^x] \text{ depende de A}} \right) = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\nu^{ab}$$

$$(A_\mu^x)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \chi^a + f^{abc} A_\mu^b \chi^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} \left(\delta^{ac} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b \right) \chi^c \equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ac} \chi^c$$

$\frac{\delta G(A_\mu^x)}{\delta \chi^b}$ é uma matriz quadrada (índices a e b) de dimensão N^2-1 (a,b são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em $SU(N)$)

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$\text{DET } M = \int D\bar{c} Dc e^{-\int d^4x \bar{c}_a M^a_b c_b}$$

matriz nxn

campo de números de Grassmann. Multipleteo com n componentes, no caso em questão isso significa campos se transformando na rep. adjunta de $SU(N)$

Finalmente:

$$\Delta_G[A_\mu^x] = \text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\mu^x)}{\delta \chi} \right] = \int D\bar{c} Dc \exp \left[i \int d^4x \bar{c}_a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c_c \right]$$

fatores g e -i incluídos na definição de c

- C {
 - Adjunta de SU(N)
 - Anti-comutam (estatística de férmions)
 - Escalares de Lorentz (spin 0)
- Relação spin-estatística errada!
- Fantasmas (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\mathcal{L}_{FPG} \equiv \bar{c}_a (-D^\mu D_\mu) c_c = \bar{c}_a (-\delta^{ab} \partial^2 - g f^{abc} D^\mu A_\mu^b) c_c =$$

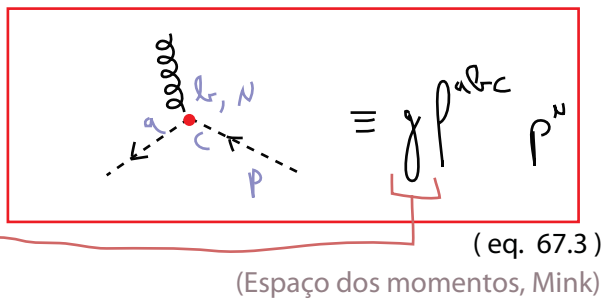
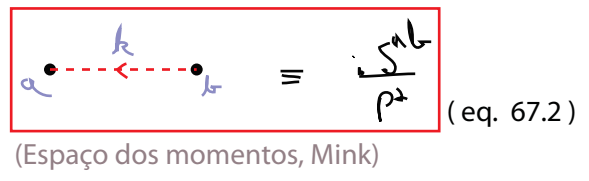
$$= -\bar{c}_a \square c_a - g f^{abc} \bar{c}_a D^\mu (A_\mu^b c_c) \quad (\text{eq. 67.1})$$

Termo cinético: $D^\mu \bar{c}_a D^\mu c_a$

Interação Ghost-Gauge

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

$$g f^{abc} (D^\mu \bar{c}_a) A_\mu^b c_c$$



Acoplamento de gauge

Com isso em mente, temos:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPG}} \delta(G(A_\mu^a))$$

Esta δ é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^a)) = \delta(D^\mu A_\mu^a - w)$$

Basta multiplicar Z pela identidade

$$N(\xi) \int \mathcal{D}w e^{-i \int d^4x \xi w} = 1$$

Escolhido de forma a garantir a ident.

E fazer a integral em ω usando a delta:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{A}_\mu \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPG}} \quad \text{EXP} \left[i \int d^4x \left(- \frac{(\partial^\nu A_\mu)^2}{2\xi} \right) \right]$$

↳ Absorve as normalizações

 \mathcal{L}_{GF}
 (Gauge Fixing)

Podemos inclusive incluir os férmions para a lagrangeana final:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\not{\partial}^\nu D_\nu^{ac}) c_c \quad (\text{eq. 68.1})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu - i g A_\mu^a t^a)$$

$$D_\nu^{ac} = (\delta^{ac} \partial_\nu + g f^{abc} A_\nu^b)$$

Depende da rep. em que os ψ se transformam (esta forma é para a fundamental)

Lembrando que ainda restam índices escondidos nos férmions:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \gamma^\nu t^a \Psi = \bar{\Psi}_{iA} \gamma^\nu_{ij} t^a_{AB} \Psi_{jB}$$

↳ Índices spinoriais

 Ψ_{jB}

↳ Índices da representação em que os férmions se transformam (neste caso a fundamental de SU(N) (A,B = 1... N))

As regras de Feynman da parte fermiônica não mudam muito, basta lembrar que temos um número de férmions igual à dimensão da representação do grupo. O propagador só muda para incluir o índice da simetria interna:

$$\langle \Psi_{iA}(x) \bar{\Psi}_{jB}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k} - m} \right)_{ij} \delta_{AB} e^{-ik(x-y)}$$

$$A \xrightarrow{P} B = \frac{i(\not{P} + m) \delta_{AB}}{P^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{eq. 68.2})$$

(Espaço dos momentos, Mink., $g_{\mu\nu} = \text{Diag}\{1, -1, -1, -1\}$)

$$A \xrightarrow{P} B = -i \frac{(-i\not{P} + m) \delta_{AB}}{P^2 + m^2 - i\epsilon}$$

(Espaço dos momentos, Mink., $g_{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\}$)

Uma vez fixado o Gauge, podemos obter o propagador para os bósons de Gauge a partir dos termos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})} \\
 & \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 \right] = \\
 & \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} + \frac{1}{2\xi} A^{a\mu} (\partial_\mu \partial_\nu) A^{a\nu} \right] \\
 & = \int d^4x \frac{1}{2} A^{a\mu} \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^{a\nu} = \text{temos que inverter este operador} \\
 & = \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^{a\nu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\
 & = \int d^4k \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[-g_{\mu\nu} k_2^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \tilde{A}^{a\nu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\
 & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{a\mu}(k) \delta_{ab} \left[\left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \tilde{A}^{b\nu}(-k)
 \end{aligned}$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + \left(\xi - 1 \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - i\epsilon} \right] \delta_{ab} \iff \begin{matrix} a & & b \\ \swarrow & \text{---} & \searrow \\ \mu & \text{---} & \nu \end{matrix}$$

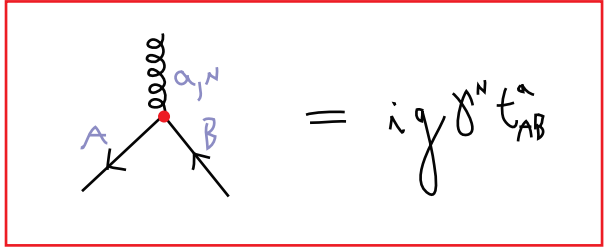
(eq. 69.1)

(Mink., Momento)

Notando que temos N²-1 propagadores idênticos.

A interação dos férmions vem de (assumindo que se transformem na rep. fundamental):

$$\bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi \Rightarrow \gamma \bar{\Psi}_A \gamma^\mu A_\mu^a t_{AB}^a \Psi_B$$



$$= ig \gamma^\mu t_{AB}^a$$

(eq. 69.2)

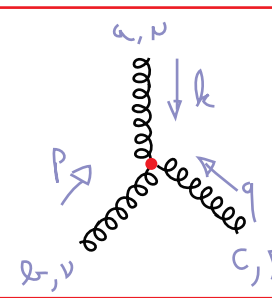
(Mink., Momento)

Temos ainda alguns termos provenientes de $-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (\partial^\mu A^{\alpha\nu} - \partial^\nu A^{\alpha\mu} + g f^{a\beta\gamma} A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu}) = \\
 &= -\frac{1}{4} \left[\underbrace{\dots}_{N \leftrightarrow \nu; \alpha \rightarrow c; \gamma \rightarrow b} + (\partial_\mu A_\nu) g f^{a\beta\gamma} A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu} \underbrace{- (\partial_\nu A_\mu) g f^{a\beta\gamma} A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu}}_{\alpha \rightarrow \mu; \gamma \rightarrow c} + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \underbrace{(\partial^\mu A^{\alpha\nu})}_{N \leftrightarrow \nu; \alpha \rightarrow c} \right. \\
 &\quad \left. - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c (\partial^\nu A^{\alpha\mu}) + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c g f^{a\beta\gamma} A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu} \right] = \\
 &= -\frac{1}{4} \left[-4 g f^{abc} (\partial_\nu A_\mu) A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu} + g^2 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c f^{a\beta\gamma} A^{\beta\mu} A^{\gamma\nu} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_c^\nu | \langle c | (\partial_\alpha A_\beta^a) A^{\beta\gamma} A^{\delta\epsilon} | k_a^\nu \rangle &\Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_\alpha) \gamma_\beta^\nu \delta_{ca} g^{\nu\beta} \delta_{\mu\alpha} g^{\mu\epsilon} \delta_{c\epsilon} = \\
 &= g f^{abc} k^\mu g^{\nu\mu}
 \end{aligned}$$

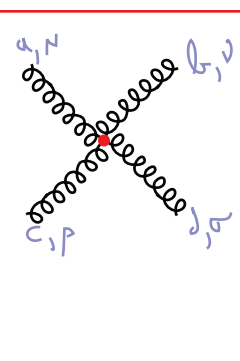
$$\begin{aligned}
 \langle P_c^\nu | \langle c | (\partial_\alpha A_\beta^a) A^{\beta\gamma} A^{\delta\epsilon} | k_a^\nu \rangle &\Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_\alpha) \gamma_\beta^\nu \delta_{ca} g^{\nu\beta} \delta_{\mu\alpha} g^{\mu\epsilon} \delta_{c\epsilon} = \\
 &= g f^{abc} k^\nu g^{\mu\nu} = -g f^{abc} k^\nu g^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$



$$= g f^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\mu + g^{\nu\mu} (p-q)^\mu + g^{\mu\nu} (q-k)^\mu]$$

(Mink., Momento)
(eq. 70.1)

Seguindo a mesma lógica, obtemos o acoplamento quártico (são 4! contrações, mas somente 6 delas são diferentes e se repetem 4 vezes, o que some com o fator 1/4 da Lagrangeana):



$$\begin{aligned}
 &= -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) \right. \\
 &\quad \left. + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) \right]
 \end{aligned}$$

(Mink., Momento)

(eq. 70.2)

A introdução dos Ghosts de Fadeev-Popov pode ser incômoda, mas não leva a nenhum resultado observável que contrarie o estabelecido experimentalmente. Em especial, não introduz nenhum grau de liberdade adicional na teoria (que continua sendo uma teoria de bósons de gauge, férmions e escalares, conforme o caso), e portanto não há escalar com a estatística errada. Não faremos isto em detalhes, mas é possível mostrar que:

polarizações longitudinais dos bósons de Gauge

o que nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade “negativos” e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de gauge com a polarização indesejada. É possível usar as transformações BRST para definir os estados físicos da teoria e então mostrar que estes estados (que incluem apenas as polarizações transversais dos bósons de Gauge) nunca são levados nos estados não físicos (Ghosts e Bósons Longitudinais) pela evolução temporal do sistema. Para mais detalhes veja as notas do curso de campo de 2013, pgs 153 a 165 em

http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2013tqc2/tudo_TQC2.pdf



O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 & 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de $\lambda\phi^4$:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]} = \left(\prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{-i k x} \phi(k)$$

↑
unitária

$$\mathcal{D}\phi = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre: $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de k que, apesar de pequenos, tem valores enormes de k_0 e \vec{k} , trabalharemos no espaço Euclideano. $|k_E| \leq \Lambda$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin $s(x)$ faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo H é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$
 $H = 0$ } \rightarrow Magnetização M paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

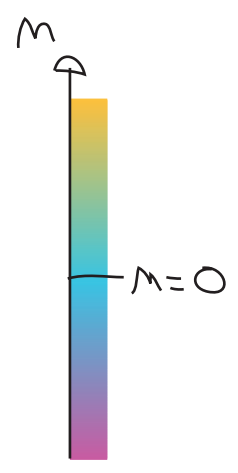
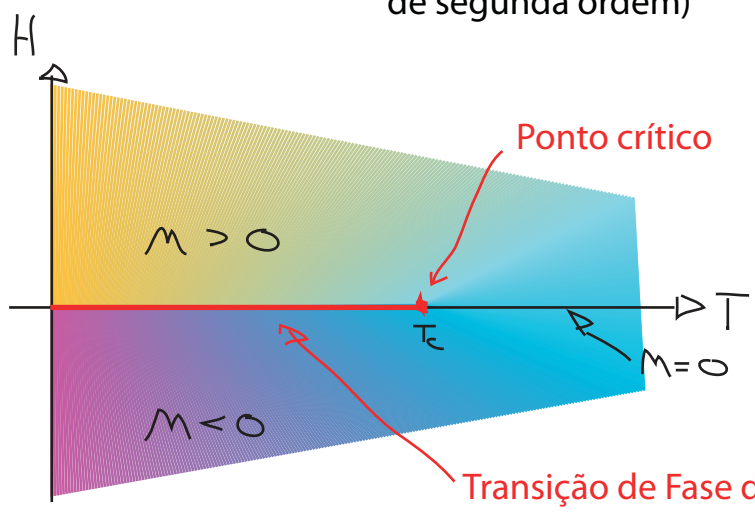
$T \sim 0$
 $H \neq 0$ } \rightarrow Favorece M paralelo ou antiparalelo

Mudança de H pequeno e negativo para pequeno e positivo } \rightarrow Mudança descontínua em M
 $T \sim 0$ } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$ Spins cada vez mais desordenados $|M|$ vai diminuindo

$T = T_c$
 $H = 0$ } $\rightarrow M = 0$

\hookrightarrow Valores grandes de H ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de $H = 0$ desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ($M > 0$ e $M < 0$) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de M e T e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico M é pequeno e podemos expandir $G(M)$ como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

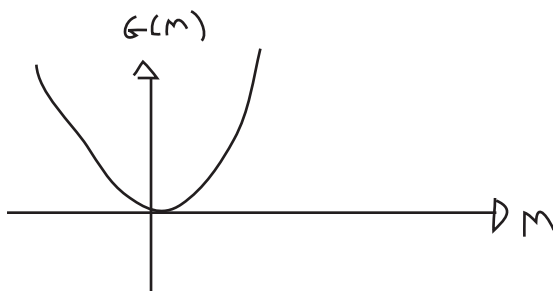
o sistema é simétrico por mudança no sinal de M , então $G(M)$ tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em $H = 0$, devemos minimizar G :

$$H = 0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

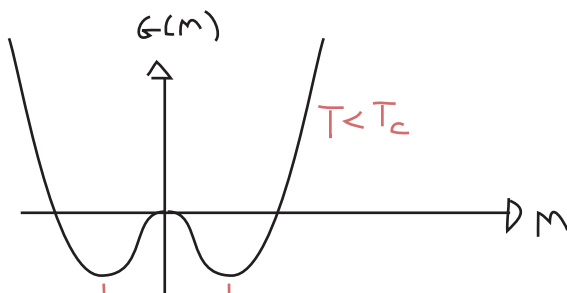
Resta fixar B e C , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se B puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

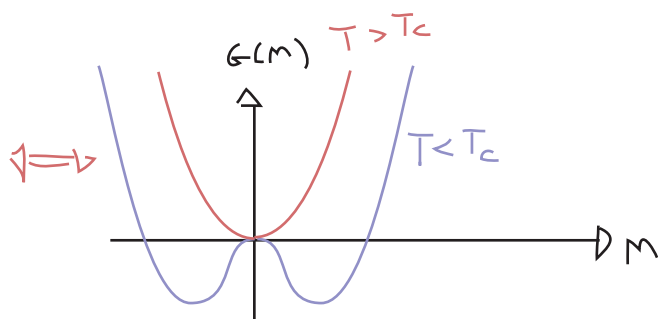
$$B(T) = b_5 (T - T_c) \quad C(T) = c \quad b_5, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[\frac{b_5}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para H não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a M): $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para $H = 0$ e $T < T_c$. Substituindo a definição de M , e as expressões para $B(T)$ e $C(T)$ na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que: $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$ } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de x . Procurando o mínimo de G em relação a configurações do campo s obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c)s + 4cs^3 - H$$

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \Rightarrow \kappa \neq 0 \\ M \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S < 1 \\ S^3 \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) S(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo $s(x)$ que surge quando o spin em $x = 0$ é forçado a se alinhar com H

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}$$

comprimento de correlação $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

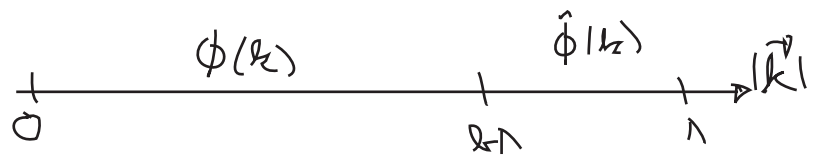
É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes b e c , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em $(T - T_c)$ só depende de podermos expandir G em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de $s(x)$ estará ligado ao valor em $x=0$ dependendo de quão longe ele está de $x=0$. A escala de "longe" é dada por ξ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em $x=0$, e que a "massa" desta partícula (ξ^{-1}) é da ordem de $[b(T-T_c)]^{-1/2}$. Se estivermos longe da temperatura crítica $|T| \gg |T_c|$, então o único parâmetro que determina a massa é $B(T)$, que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de m é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que $m \sim \Lambda$ (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que $m \ll \Lambda$, e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 76.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$



$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & k-1 \leq |k| < \Lambda \\ 0 & |k| < k-1 \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < k-1 \\ 0 & |k| \geq k-1 \end{cases} \end{cases} \quad k < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo $\phi(k)\hat{\phi}(k')$ são iguais a zero (ortogonalidade para $k \neq k'$)

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em $\hat{\phi}$, se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int_{|k| \leq \Lambda} d^d k \int_{|k'| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i k x} e^{-i k' x} i k_\nu i k'_\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que $\phi(x)$ seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad |k| \leq \Lambda \\ 0 \quad \text{quer outro } k \end{array} \right.$

Os outros termos da lagrangeana de $\hat{\phi}$ são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo $\hat{\phi}^2$:

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left(+ \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de ϕ e $\hat{\phi}$:

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos $\hat{\phi}$ só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

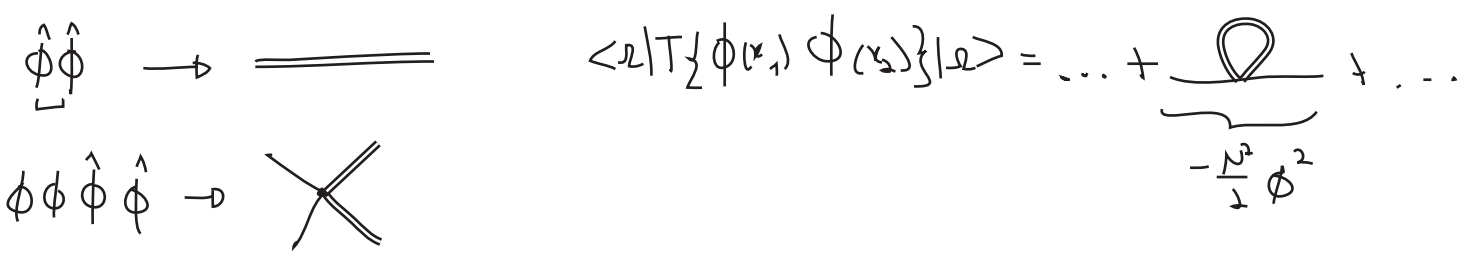
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos ϕ
↘ estamos assumindo que os campos externos serão ϕ e não $\hat{\phi}$

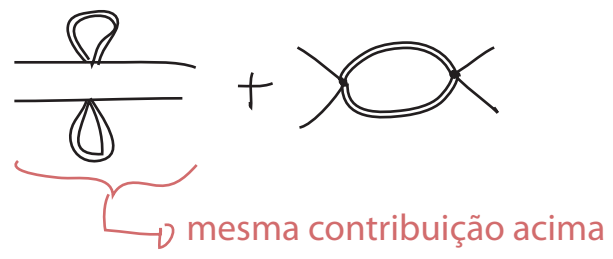
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{N}{2} \phi^2$ na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



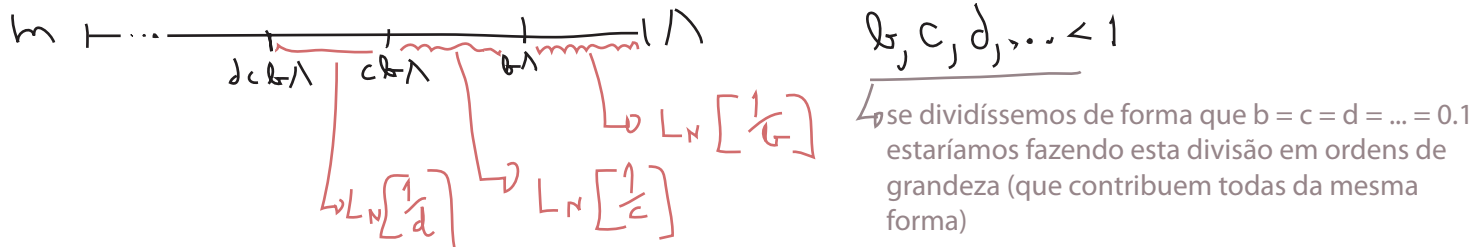
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X diagram} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[\frac{1}{b} \right] \quad \text{(eq. 78.1)}$$

Note que se fizéssemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4 , mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3 \hat{\phi}$ por exemplo:

$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas externas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:

$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[\mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 79.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

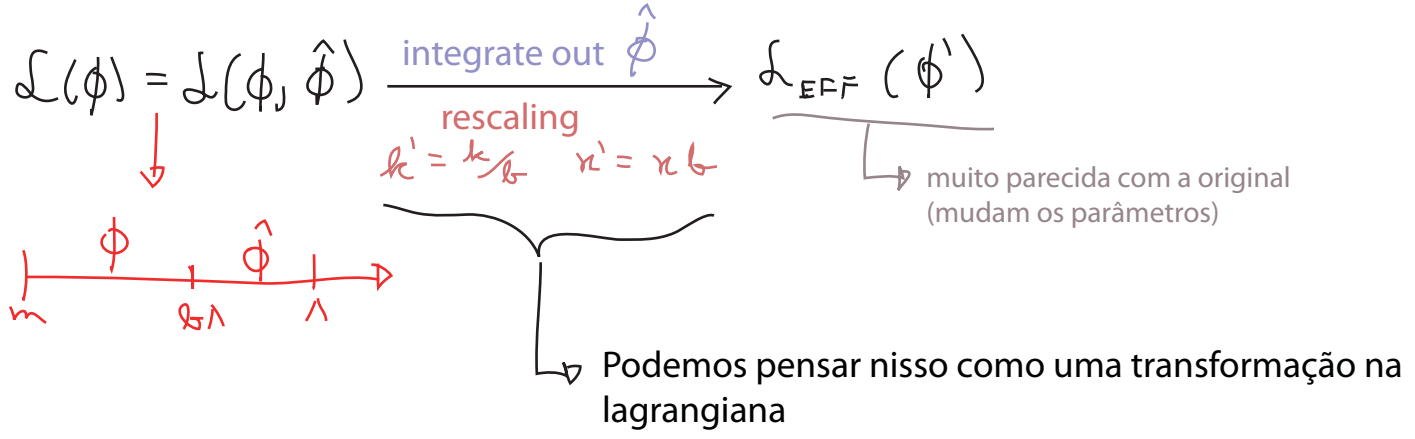
Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
 \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\
 m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\
 \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\
 c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\
 \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

(eq. 80.1)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 80.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b, c, \dots) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos δ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$ $(\lambda \text{ perturbativo})$

m_0, λ_0 finitos!

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas ideias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

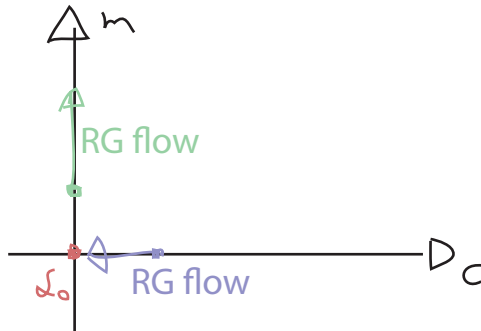
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 80.1:

(eq. 80.1)

$$\left. \begin{aligned} b m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \simeq m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \simeq \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \simeq C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \simeq D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como $b < 1$, os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar: ϕ^2 é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

ϕ^4 $\left\{ \begin{array}{l} d < 4 \text{ relevante} \\ d = 4 \text{ marginal} \\ d > 4 \text{ irrelevante} \end{array} \right.$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de ϕ (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 79-80, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 80.1)}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

(eq. 82.1)

Note que a dimensão do operador é:

$$Dim [\hat{O}_{N,M}] = N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,M}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,M}] \equiv D_c = d - d_{N,M} = d - \left[N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o que sabemos da conexão entre renormalizabilidade e a dimensão dos acoplamentos, vemos que operadores **relevantes** ($D_c > 0$) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ($D_c = 0$) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ($D_c < 0$) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

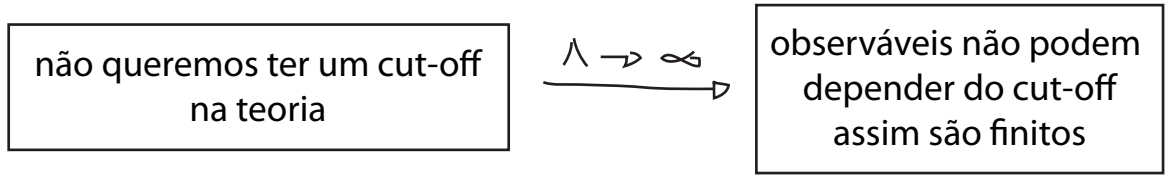
$$C_{OEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,M}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,M}}$$

$$d < d_{N,M} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,M}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left(\frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,M} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,M} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,M}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

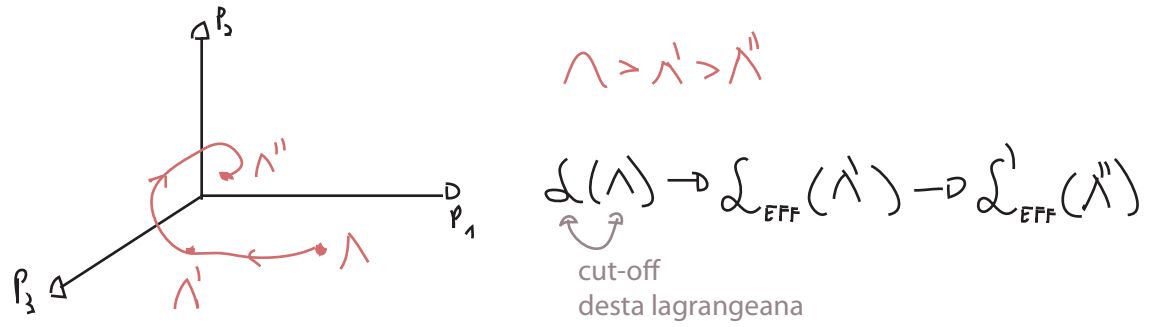


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

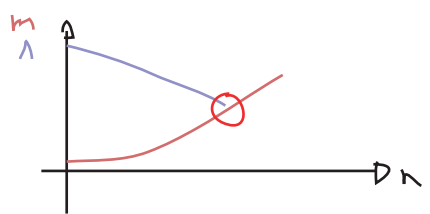
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com $m_0 \ll \Lambda_0$

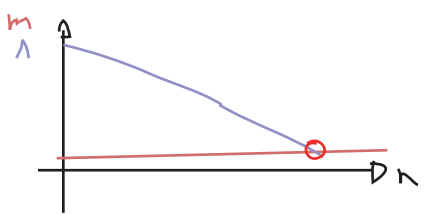
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 g^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto $m'^2 \sim \Lambda'^2$ e temos que parar aí. Exigir que m' seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de \mathcal{L}_0 , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a m passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de \mathcal{L}_0) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador ϕ^4

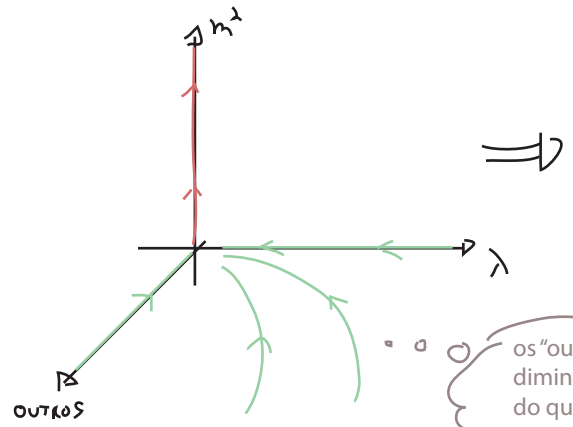
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-1} \mu^{d-4}$$

eq. 78.1

$\Delta z \sim \underbrace{\text{loop}}_{\text{só corrige a massa}} + \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}$

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} L_N\left(\frac{1}{\mu}\right) \rightarrow \lambda' \text{ diminui lentamente conforme "integramos"}$$

$L_N \rightarrow 1$
 $L_N \rightarrow 0$



isso quer dizer que $\lambda\phi^4$ acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de $\lambda\phi^4$ sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que λ

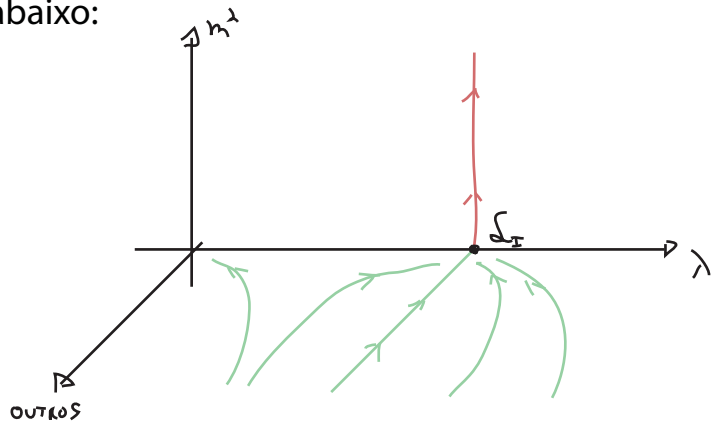
$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d < 4$

O operador ϕ^4 agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de λ vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem λ (da eq. 78.1). Para $d < 4$ temos:

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \mu^{d-4})}{d-4} \mu^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \mu^{d-4}$

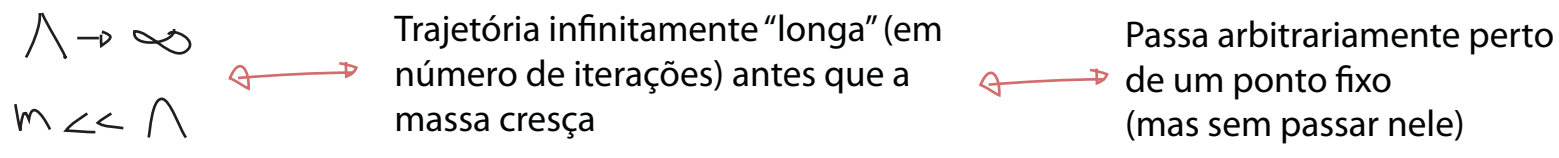
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto λ pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos $d \rightarrow 4$, e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de $d = 4$ temos o diagrama abaixo:



A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos $\Lambda \rightarrow \infty$ e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os δ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- ▶ toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ▶ ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de Λ e $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização**. Vendo como os coeficientes dependem desta escala μ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começemos com uma teoria escalar sem massa (o termo m^2 renormalizado é exatamente zero). As condições para teorias massivas não servem mais (o $\delta\lambda$ obtido das condições lá usadas tem singularidades para $m^2 = 0$). Usaremos então uma escala arbitrária M :

$p^2 = -M^2$

$= 0$

$= 0$

ficando na região $p^2 < 0$ temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para $p^2 > 0$ é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

$= -i \lambda$

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

Com estas novas condições:

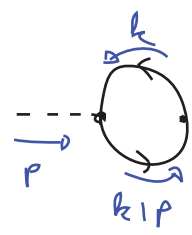
$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

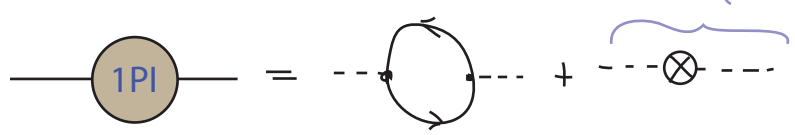
Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, temos:



$$= \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-1/2}}$$

$\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$

$$m_f^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$



$$1PI = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)p^2]^{1-1/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\underbrace{\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{LN}(-p^2) + \text{LN}(4\pi) \right]}_{d \sim 2} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-1/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de p^2 portanto será cancelada por algo equivalente em δm .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[-p^2 \left(\frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Loc}(4\pi) - \gamma + 1 - \text{LN}(-p^2) \right) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para δm , apenas para δZ .

$$\rightarrow -p^2 \left(\frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{LN}\left(\frac{1}{-p^2}\right) + C \right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para δz e δm , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left(\frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left(\frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left(\text{LN} \left(\frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para $\lambda\phi^4$, mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em δZ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em $d = 4$) as divergências de δZ (e $\delta\lambda$) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização, M' para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de m_0 , λ_0 e Λ . M só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \phi \\ M \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em M ?

$$M \rightarrow M + \delta M$$

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda$$

$$\phi \rightarrow (1 + \delta\eta) \phi \quad \dots \quad 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = Z^{-1/2} \phi_0 \\ \downarrow \\ \phi = Z^{-1/2} (1 + \delta\eta) \phi_0 \end{array} \right.$$

Na função de Green só importa a mudança em Z (já que G_0 só depende dos parâmetros núm):

$$Z^{-1/2} \rightarrow (1 + \delta\eta) Z^{-1/2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n\delta\eta) Z^{-n/2}$$

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)}$$

Pensando em G como uma função de M e λ , esta transformação é dada por:

$$\boxed{dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}} \quad (\text{eq. 88.1})$$

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 89.1})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 89.2})$$

Temos:

$$\left(\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre β e γ :

→ são os mesmo para qualquer n
 → são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 89.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$ ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$ ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em M será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função γ para cada campo e uma função β para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa, $m_e = 0$) (n é o número de elétrons e m o de fótons):

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad (\text{eq. 89.4})$$

Calculando as funções β e γ

Mais uma vez, fiquemos na teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

$$G^{(2)}(p) = \text{---}^{\lambda^0} + \underbrace{\text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1}}_{\text{sabemos que daqui só saem contribuições para } \delta m} + \text{---}^{\lambda^1} \otimes \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Como o cálculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre γ daqui: como não há correções a $G^{(2)}$ em ordem λ , só introduzimos a dependência em M e λ em $G^{(2)}$ em ordem λ^2 . Assim a equação de CS para $G^{(2)}$ fica:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$ $\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$ $\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:

$$G^4 = \text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green:

$$G^4 = \left[-i\lambda + (-i\lambda)^2 \left[iV(s) + iV(t) + iV(u) \right] - i\delta_\lambda \right] \cdot \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2}$$

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 d_0 \frac{1}{[m^2 - \delta(1+d_0)p^2]^{2-d/2}} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^1 d_0 \left(\frac{\lambda}{\epsilon} - \delta + L_0[1+d_0] - L_0[m^2 - \delta(1+d_0)s] \right) \right\}$$

propagadores da pernas externas
(que tem correções $\sim \lambda^2$ conforme vimos acima)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a λ se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(x(1-x)M^2)^{d/2 - 1/2}}$$

$d \rightarrow 4$:
$$\delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2 - \frac{1}{2}} - \ln(M^2) + \dots \right]$$

↳ indep de M e finito

Temos então:

$$M \frac{d}{dM} G^{(4)} \stackrel{O(\lambda^2)}{=} \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{i-1} \frac{i}{p^2}$$

$$\frac{d}{d\lambda} G^{(4)} = \left(-i + O(\lambda) \right) \frac{4}{i-1} \frac{i}{p^2}$$

$\delta_\lambda \sim O(\lambda^2)$

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^{(4)} = 0$$

$O(\lambda^2)$ $O(\lambda^3)$

$$\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{i-1} \frac{i}{p^2} + \beta(\lambda) \left(-i + O(\lambda) \right) \frac{4}{i-1} \frac{i}{p^2} + 4\gamma(\lambda) G^{(4)} = 0$$

↳ tem que ter no mínimo de ordem λ^2

$$\Rightarrow \beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + O(\lambda^3) \quad \text{(eq. 91.1)}$$

$\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$

- $(\lambda^0) \Rightarrow -iA = 0$
- $(\lambda^1) \Rightarrow A - iB = 0 \Rightarrow B = 0$
- $(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} - iC = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{(4\pi)^2}$

Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função γ :

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0 \quad \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} \sim O(\lambda^3)$$

$O(\lambda^1)$ $O(\lambda^2)$ $A + B\lambda^2 + \frac{p^2(m)}{2} \lambda^2 + O(\lambda^3)$

$$(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M \frac{d p^2(m)}{dM} + 2\gamma(\lambda) A = 0 \Rightarrow \gamma(\lambda) = - \frac{\lambda^2 M \frac{d p^2(m)}{dM}}{2A} \quad \text{(eq. 91.2)}$$

que pode ser obtido calculando

De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{---} \otimes \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left[\cancel{i p^2 A} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} + \dots$$

↳ divergências em δz são Logs

$$\frac{dG^{(2)}}{dM} = -\frac{i}{p^2} \frac{d}{dM} \delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \left\{ \begin{array}{l} G \sim \underline{\text{CONST.}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \frac{dG}{d\lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\left[\underbrace{M}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} \frac{d}{dM} G^{(2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})} \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{G^{(2)}}_{\text{CONST.} + \mathcal{O}(\lambda^n)} \right] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre de ordem superior a que envolve γ

$$-\frac{i}{p^2} M \frac{d}{dM} \delta z + 2\gamma(\lambda) \frac{i}{p^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z} \quad (\text{eq. 92.1})$$

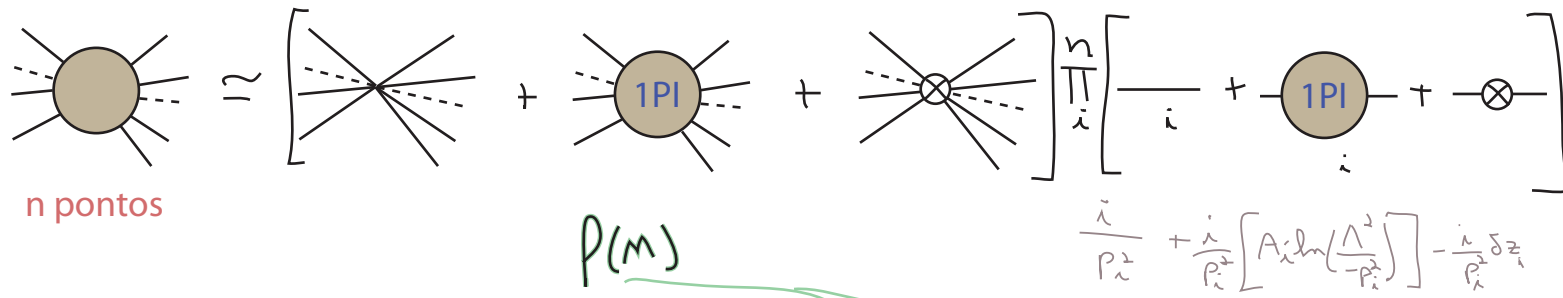
Se lembrarmos que δz tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala $-p^2 = M$, concluímos que:

$$\left\{ \frac{i}{p^2} \left[A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) \right] + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} \right\}_{p^2 = -M^2} = 0$$

$$\delta z = A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} M \cdot A \cdot \left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{\underline{-A}}$$

coeficiente do logaritmo divergente que contribuí para δz
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β . Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:



$G^{(n)} \approx \left(\prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left[-i\gamma - i\beta \ln \left[\frac{\Lambda^2}{-p^2} \right] - i\delta\gamma - i\gamma \sum_i \left(A_i \ln \left[\frac{\Lambda^2}{-p_i^2} \right] - \delta z_i \right) \right]$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs))

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo $\sim -M^2$

$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + n \gamma(g) \right] G^{(n)}(p) = 0$

$n \gamma(g) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i$

$\left(\prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left\{ M \frac{d}{dM} \left(-i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) + \beta(g) \frac{dG^{(n)}}{dg} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i G^{(n)} \right\} = 0$

$[-i + \mathcal{O}(g^2)]$

$-i\gamma + \mathcal{O}(g^2)$

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a $\delta\gamma$ ou δz_i , mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que $\delta\gamma$ ou $\gamma \delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$M \frac{d}{dM} \left(-i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) - i\beta(g) - i\gamma \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i = 0$

$\beta(g) = M \frac{d}{dM} \left(-\delta\gamma + \frac{1}{2} \gamma \sum_i \delta z_i \right)$ (eq. 93.1)

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$\delta\gamma = -\beta \ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \dots$ as partes finitas independem de M

$$\beta(g) = -2\beta - g \sum_i A_i \quad (\text{eq. 94.1})$$

Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logaritmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

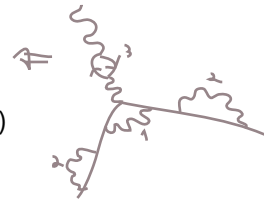
Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2 \quad (\text{eq. 94.2})$$

$$\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \quad (\text{eq. 94.3})$$



$$\beta(e) = M \frac{d}{dM} \left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3 \right) \quad (\text{eq. 94.4})$$



Se modificarmos os δ 's calculados na seção 10.3 do Peskin (eqs. 10.43, 10.44) para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = M \frac{e}{2} \left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] \frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge, δ_3 e β são invariantes (ligados à polarização do vácuo).

O significado de γ e β

Vamos tentar entender γ e β , escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$$\lambda\phi^4: \quad \phi(p) = Z(m)^{-1/2} \phi_0(p)$$

$$m \rightarrow m + \delta m \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + \delta\eta \phi$$

$$\phi' = (1 + \delta\eta)\phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi' = Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2} \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0}{Z(m)^{-1/2} \phi_0}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de γ (eq 89.2) temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{m}{\delta m} \delta\eta = -\frac{m}{\delta m} \left(\frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1 \right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}} \left(\frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2} \frac{dZ}{dm} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{m}{Z} \frac{dZ}{dm}$$

(eq. 95.1)

$$\sim \frac{1}{2} m (1 - \delta_Z + O(\delta_Z^2)) \frac{d\delta_Z}{dm}$$

que reproduz o resultado em L.O. de 92.1

↳ mostra a ligação entre γ e a mudança de Z

No caso de β , nossa definição original já era suficientemente clara (eq 89.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m} \delta\lambda$$

$$\left. \begin{array}{l} m \rightarrow m + \delta m \\ \lambda(m + \delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array} \right\}$$

$$\beta = m \frac{d}{dm} \lambda(m)$$

(eq. 95.2)

, o que mostra que β nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhermos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$\text{Dim}[G^{(2)}] = \text{Dim}\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore \quad G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2} g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right) = -\frac{i}{k^2} g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \circ \quad k^2 = -p^2 > 0$$

tem dimensão -2 e só depende de p e M

$$\text{Dim}[g] = 0$$

↳ número (e não um quadrivetor)

$$\chi \equiv \frac{k}{M} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{dM} f(x) = \frac{dx}{dM} \frac{df(x)}{dx} = \frac{-k}{M^2} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k} \frac{df}{dM} \\ \frac{d}{dk} f(x) = \frac{dx}{dk} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = M \frac{df}{dk} \end{array} \right\} \frac{df}{dM} = -\frac{k}{M} \frac{df}{dk}$$

$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -M \frac{i}{k^2} \left(\frac{d}{dM} g \right) = -\frac{i}{k^2} \left(-k \frac{d}{dk} g \right) = -k \left[-\frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left(-\frac{i}{k^2} g \right) = +\frac{2i}{k^2} g - \frac{i}{k^2} \frac{dg}{dk}$$

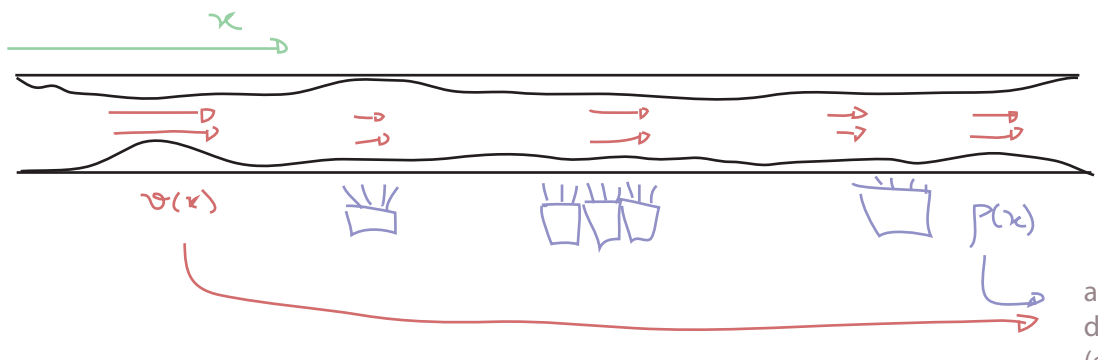
$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -k \left[\underbrace{\frac{d}{dk} \left(-\frac{i}{k^2} g \right)}_{G^{(2)}} - \frac{2i}{k^2} g \right] = -k \left[\frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)} \right] = \left[-k \frac{d}{dk} - 2 \right] G^{(2)}$$

$$\text{CS: } \left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0} \quad (\text{eq. 96.1})$$

$$\text{Teoria livre: } \beta = \gamma = 0 \quad k \frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade $v(x)$ (x é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade $D(t,x)$ e cuja taxa de crescimento é $\rho(x)$



as bactérias são arrastadas

a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

$$\frac{\partial D(t, x)}{\partial t} = -v(x) \frac{\partial D(t, x)}{\partial x} + \underbrace{P(x) D(t, x)}_{\text{crescimento}}$$

em um dado ponto x_0
 $x_- < x_0$
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. encolhe pois} \\ D[x_-] < D[x_0] \end{array} \right.$
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] > D[x_0] \end{array} \right.$

$$\hookrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

$$\left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0 \quad (\text{eq. 96.1})$$

$\text{Log}\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t$
 $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk \quad \frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$
 $\lambda \leftrightarrow v$
 $-\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x)$
 $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$
 $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

Suponha que conheçamos: $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em $(t_1 > 0, x_1)$ temos que olhar a história dele. Considere um elemento que está na posição x_1 em um tempo t_1 , podemos descobrir onde ele estava em $t = 0$, integrando sobre seu movimento para o passado, segundo a equação:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) \equiv -v(\bar{x})$$

→ posição de um elemento de fluido indo na direção errada (-v)

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$ → este começa em x_1

$\bar{x}(t_1; x_1)$ → posição dele em $t = 0$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era: $D_i(\bar{x}(t_1, x_1))$

E a densidade em (t_1, x_1) será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right] \quad (\text{eq. 98.1})$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:

$$\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$$

posição dele em $t = t'$

$$\left. \begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}' & \bar{x}(t') &= \bar{x}' \\ \bar{x}(0, x_1) &= x_1 & \bar{x}(t_1, x_1) &= \bar{x} \end{aligned} \right\}$$

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

↳ notação

Voltando a mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 98.1 temos:

$$\left. \begin{aligned} L_N(\frac{k}{M}) &\leftrightarrow t \\ \lambda &\leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k, \lambda) &\leftrightarrow P(t, x) \\ -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 &\leftrightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \leftrightarrow k=M \\ D_i(x) \leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{cases}$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \cdot \left[2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 98.2})$$

redefino $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -\frac{i}{k^2} \hat{G}_i^{(2)}$

$\text{Exp} \left[-2 \int_M^k d[L_N(\frac{k'}{M})] \right] = \frac{M^2}{k^2}$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 98.3})$$

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos $t = 0$ para agora e $t = t_1$ para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como $k = M$). Note que a taxa de mudança é dada pela função β

\Rightarrow Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida G_1 é obtendo a função $G(2)$ em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 98.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{PERT.}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \iff G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{98.3}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} G^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda))$$

$$\therefore G^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \rightarrow G^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante P^2 e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^2}\right)^4 \mathcal{G}\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[L_N \left(\frac{p'}{M} \right) \right] r[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 104.1})$$

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda))$$

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda(M)) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) \quad (\text{eq. 100.2})$$

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. De uma forma geral, qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai depender de duas grandezas:

$\lambda \leftrightarrow$ Constante de acoplamento

$L_N \left(-\frac{p^2}{M^2} \right) \leftrightarrow$ Grandeza adimensional que mede a "distância" entre p e M
onde $\lambda = \bar{\lambda}(M)$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que λ seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros (λ e o logaritmo de p) em uma função do acoplamento (G_i) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência M . Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala M) vemos que $G_i^{(n)} = G^{(n)}$, mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 98.3 e 100.1 nos dizem é que devemos substituir λ por um acoplamento mais apropriado para aquela escala: $\bar{\lambda}$, o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 100.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a $\bar{\lambda}$.

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança destas vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 98.3 e 4 para 100.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter $\bar{\lambda}$ no caso da teoria $\lambda\phi^4$

(91.1) $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})}$$

(eq. 101.1)

Note que, expandindo em λ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M}) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 85 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função β positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em λ , temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln(\frac{k}{M}) + C^2 \lambda^3 \ln^2(\frac{k}{M}) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left(\frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para k muito longe de M . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 101.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento. Desta forma, qualquer problema que possa vir do tamanho dos logs será traduzido no tamanho do acoplamento efetivo, e assim só temos que nos preocupar se este parâmetro é pequeno.

Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 88 e 89), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável, sua normalização é fixada e portanto não temos a função γ (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Dim = -2

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 96 e trocar a derivada em M por derivadas em q

$$\left[q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 96.1) $\Rightarrow \left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\lambda(R; \lambda)) \text{E} \times \text{r} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[L_N \left(\frac{k'}{M} \right) \right] \right\} \left[\lambda(k'; \lambda) \right] \quad (\text{eq. 202.3})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r))$$

(eq. 102.1)

↳ $\bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[\text{Log} \left(\frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_1(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função β da QED (pg. 94), $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$, temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d[\text{Log}(\varphi/M)]$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/M)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(M; e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left(\frac{1}{\bar{e}_R^2} - \frac{1}{e^2} \right) = \text{Log}(\varphi/M)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left(\frac{e_R}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/M)}$$

(eq. 103.1)

O que é muito similar à expressão 7.96 do Peskin, e fica idêntica se escolhermos M da ordem da massa do elétron $M^2 = A m^2$, $e_r = e$ e $A = e^{(5/3)}$.

Evolução (*running*) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \beta(\lambda) > 0 & & \beta(\lambda) < 0 \end{array}$$

$\beta(\lambda) = 0$

$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e portanto os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* (Z), que somem de qualquer elemento de matriz S . São chamadas de **QFTs finitas**.

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função β da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

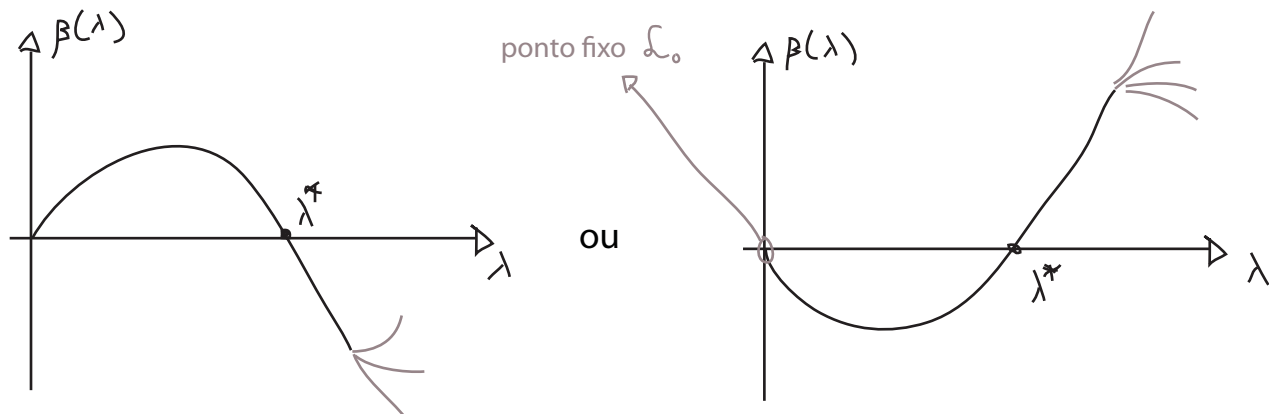
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para β positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função β , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de β , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto. Neste caso poderíamos obter funções β da seguinte forma:

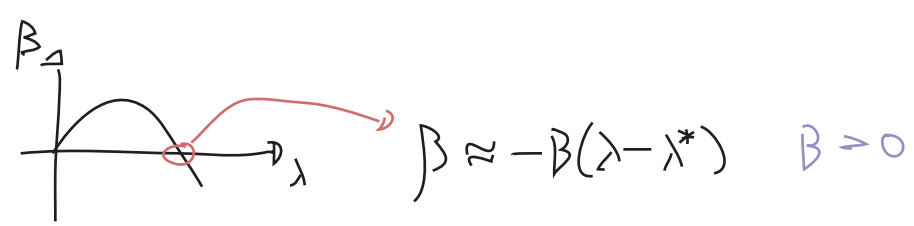


Quando $\bar{\lambda}$ chega perto deste ponto λ^* , β vai para zero e a constante de acoplamento pára de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso $\beta(\lambda \sim 0) > 0$, com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

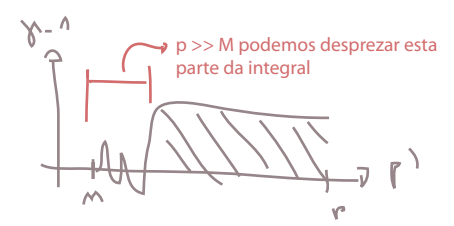
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$ } e a velocidade é determinada pela inclinação local de β

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 98.2 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[\gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para p grande a integral será dominada por $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1-\gamma(\lambda^*)}$$

$$\text{Exp} \left\{ \text{Ln}\left[\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^{\gamma-1}\right] \right\}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de p^2 , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos $\gamma(\lambda^*)$ de **dimensão anômala** do campo (de fato a função γ acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$ operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado $\mathcal{O}_m \equiv Z_0^{-1}(M) \mathcal{O}_0$ satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_m(k) \rangle$$

notação:

$$G^{(n;m)}$$

função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nós, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_0(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_0(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 106.1})$$

$$\gamma_0(\lambda) = M \frac{d}{dM} \ln[Z_0(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^\mu \mathcal{D}^\nu + \gamma^\nu \mathcal{D}^\mu] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores $\{\mathcal{O}^i\}$ de forma que:

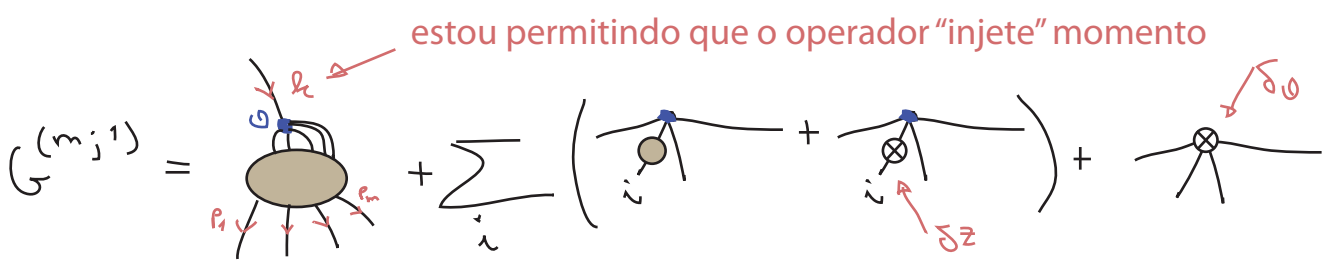
$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^i(M) \mathcal{O}_M^i$$

o que também transforma a dimensão anômala γ em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)]^{ik} M \frac{d}{dM} [Z_{\mathcal{O}}(M)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para γ , calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_M(k) \rangle$$

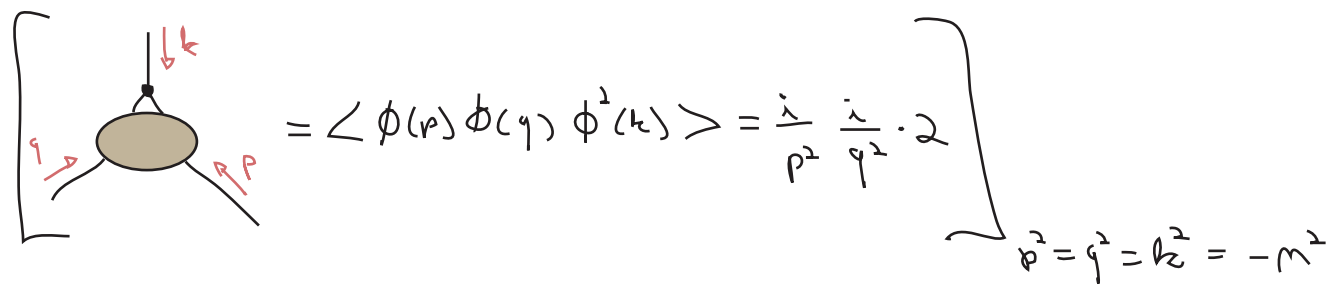


Usando a mesma lógica das páginas 92 a 94, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 106.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 107.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador ϕ^2 , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:



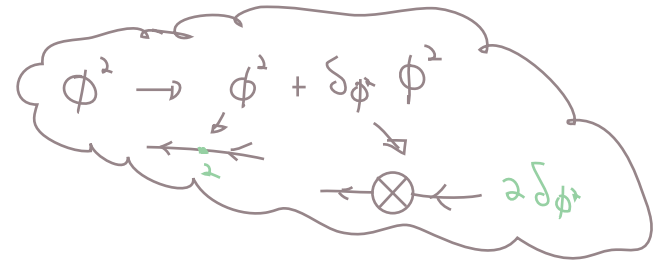
A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de $\lambda\phi^4$):

$$\left[\text{blob}(p, q, k) \right] = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{i}{\ell^2} \frac{i}{(k+\ell)^2} =$$

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[-\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em $-M^2$ este loop deve ser cancelado por:



$$\text{loop with cross} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 108.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em $\lambda\phi^4$ não temos contribuição de ordem λ para δz , então:

(eq. 107.1 com $\frac{d}{dM}(\delta z) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$)

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 108.2})$$

Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$ lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 210.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0 \quad (\text{eq. 108.3})$$

Se escrevemos:

$$G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$$

aparece da mesma forma que o $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$ (pgs 88-89), só que com o número de inserções do operador (l) ao invés do número de operadores do campo escalar (n)

Então: $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_i l(m^2)^p G^{(n);l}$

de forma que a seguinte equação garante 108.3 para cada ordem de m^2 :

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\phi m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 109.1})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d[\log(p/m)]} \bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda}) \bar{m}^2(p) \iff \bar{m}^2(M) = m^2$$

O running da massa vai depender essencialmente da **dimensão anômala do operador ϕ^2** na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 109.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$d_i \equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i] \\ \downarrow \\ C_i \equiv \rho_i M^{4-d_i}$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x) \quad \hookrightarrow \text{Dim}[\rho_i] = 0$$

estamos introduzindo uma dependência em M esta nova dependência é compensada por ρ_i

Com isso 109.2 fica:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

$\dots + \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} + \dots$

$f(M)$ (antes a dep. em M estava só aqui)

$M \frac{d}{dM} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (4-d_i) M^{4-d_i} \rho_i$

$(d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (d_i - 4) M^{4-d_i} \rho_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

$$\left[m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 110.1})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais) ρ_i , aparecem com a mesma forma de λ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades β e β_i . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\frac{p}{m})]} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 110.2})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contra-termos} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\psi) \Rightarrow \rho_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \dots \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de γ_i para β_i (γ_i depende de ρ_i ou λ , portanto $\gamma_i \rho_i \sim \mathcal{O}(\text{pert}^2)$); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\frac{p}{m})]} \bar{\rho}_i = [d_i - \gamma] \bar{\rho}_i \rightarrow \beta_i(\bar{\rho}_i) = (d_i - \gamma) \bar{\rho}_i + \underbrace{\delta_i \bar{\rho}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left(\frac{p}{m}\right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis **em quatro dimensões**) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em d dimensões, temos que tomar cuidado com o termo $\lambda \phi^4$, que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}$$

$$\text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' m^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$\text{Dim}[\phi_m^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2$ (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$

para outros operadores basta trocar: $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$ \rightarrow dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em d dimensões. O cálculo que fizemos para $\int \phi^2$ muda da seguinte forma, para d próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \text{Log}_e(M^2) + (d-4) \left[-\frac{1}{4} \text{Log}_e^2(M^2) - \frac{1}{2} \gamma \text{Log}_e(M^2) \right] + \dots + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

indep de M

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4) \left[-\gamma - \text{Log}_e(M^2) \right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d-4)$$

\rightarrow o que tínhamos antes (em $d = 4$, eqs. 108.1 e 108.2)

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[2 - \mathcal{O}(d-4) \right] = \left[\gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right] \quad \gamma_{\phi^2}^{(4)} = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d-4) \sim 0 \quad \beta_i(d-4) \sim 0 \quad \beta_m = \left(-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} \right) P_m + \dots \quad (\text{eq. 111.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções: $\beta_i = \left[d_i - d + \gamma_i^{(4)} \right] P_i + \dots$

No caso da função β temos um contribuição da dimensão de massa de λ :

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 111.2}) \quad \beta = (d-4)\lambda + M^{d-4} \mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\text{Log}_e(M) + \dots) \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$\lambda^2(d-4) \sim 0$
 $1 \cdot \mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)$

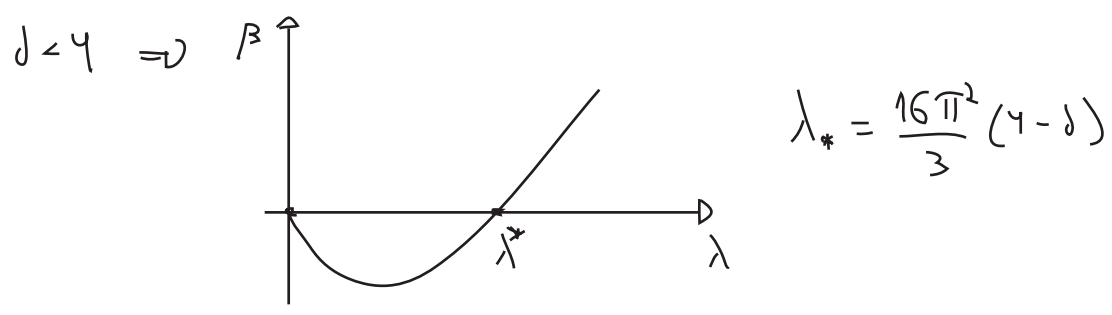
modificando o que há na pg 91 $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow \left[M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda} + \dots \right] G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[\lambda(d-4) M^{4-d} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] = 0$
introduziu a ordem λ^1 (que antes era nula)

Usando o resultado 91.1: $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(1-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



o que é o comportamento que previmos nas págs 104-105, com um ponto fixo em λ^*

Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 111.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em $\lambda\phi^4$:

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(M/\mu)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 108.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d \bar{p}_m = -2 d[\text{Log}(M/\mu)] \Rightarrow \bar{p}_m = p_m \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \quad (\text{eq. 112.1})$$

Lembrando que $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$ (o que apenas nos diz que quando $p \sim m$ o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para $p \gg m$)

$$\bar{m}^2(p) = M^2 \bar{p}_m = m^2 \left(\frac{M}{p}\right)^2$$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim p_0^{-1} \quad / \quad \bar{p}_m(p_0) = 1 \quad \dots \Rightarrow \bar{p}_m(p_0) = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{p_0^2} = 1 \Rightarrow p_0^2 = m^2 \Rightarrow p_0^2 = p_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 p_m)^{-1/2} = m^{-1} \quad (\text{como esperado, nada demais aqui})$$

Usando o mesmo critério para definir ξ perto do ponto fixo λ^* , obtemos:

$$\frac{d}{d[\log(M/\mu)]} \bar{P}_m = \left(-2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \bar{P}_m = P_m \left(\frac{M}{\mu} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 113.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left(\frac{M}{P_0} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} = 1 \Rightarrow P_0^{-\nu} = P_m^{-1/\nu}$$

$$P_0 = P_m^\nu M$$

$$\xi \sim P_m^{-\nu}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad \lambda^* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$\nu^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que P_m é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e ν mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$$

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]}$$

$$\nu \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

contruindo uma teoria escalar com simetria $O(N)$ é possível mostrar que:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d)$$

com N campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$ com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$ isotrópicos

N	1	2	3
ν_{TEOR}	0,6	0,63	0,65
ν_{EXP}	0,64	0,67	0,71

E os valores previstos concordam bem com experimentos ($d = 3$):

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
<i>N = 1 Systems:</i>					
γ	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7) 1.22 (3) 1.24 (2)	binary liquid liquid-gas β -brass
ν	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5) 0.65 (2)	binary liquid β -brass
α	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5) 0.12 (2)	binary liquid liquid-gas
β	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5) 0.34 (1)	binary liquid liquid-gas
η	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7) 0.04 (2)	binary liquid β -brass
<i>N = 2 Systems:</i>					
γ	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
ν	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid ^4He
α	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid ^4He
<i>N = 3 Systems:</i>					
γ	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3) 1.33 (3) 1.40 (3)	EuO, EuS Ni RbMnF ₃
ν	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2) 0.724 (8)	EuO, EuS RbMnF ₃
α	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
β	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2) 0.348 (5) 0.316 (8)	EuO, EuS Ni RbMnF ₃
η	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		