Representations of the Lorentz Group in Quantum Mechanics

Felipe Augusto da Silva Barbosa

14 de Dezembro de 2020

Índice

- Relatividade Restrita
- Simetrias em Mecânica Quântica
- Estados de uma partícula

Postulados da Relatividade Restrita

- A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais;
- as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

Postulados da Relatividade Restrita

- A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais;
- as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

Partindo do 1º postulado, e assumindo que o estado inercial de uma partícula é invariante por mudança de referencial, obtém-se que as transformações de coordenadas são

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}; \qquad \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, \eta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

sendo $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e a^{μ} constantes. O conjunto de transformações (Λ, a) forma um grupo, conhecido como grupo de Poincaré.

- O grupo de Poincaré pode ser dividido em quatro subconjuntos:

x	$\Lambda^0{}_0 \geq 1$	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$
$Det(\Lambda) = 1$	$L_+^\uparrow$	$L_+^\downarrow$
$Det(\Lambda) = -1$	$L_-^\uparrow$	$L_-^\downarrow$

sendo $L_+^\uparrow$ um subgrupo de Lorentz, denominado ortócrono próprio. O ortócrono próprio consiste das transformações que efetuam boosts e rotações.

- O grupo de Poincaré pode ser dividido em quatro subconjuntos:

x	${\Lambda^0}_0 \geq 1$	${\Lambda^0}_0 \leq -1$
$Det(\Lambda) = 1$	$L_+^\uparrow$	$L_+^\downarrow$
$Det(\Lambda) = -1$	$L_-^\uparrow$	$L_-^\downarrow$

sendo $L_+^\uparrow$ um subgrupo de Lorentz, denominado ortócrono próprio. O ortócrono próprio consiste das transformações que efetuam boosts e rotações.

Uma transformação qualquer de Lorentz sempre pode ser escrita como um elemento de $L_+^\uparrow$ ou um produto deste com P, T ou PT. Sendo P e T as matrizes de paridade e reversão temporal.

- O 2º postulado é equivalente a dizer que se dois observadores conectados por uma transformação (Λ, a) realizam os mesmos experimentos os resultados obtidos são idênticos. Isso se verifica de fato para todos os experimentos que podem ser descritos do ponto de vista clássico(não quântico).
- Em M.Q. apenas o ortócrono próprio é grupo de simetria de todos os possíveis experimentos.

- O objetivo primário é descobrir quais são as leis da física, ou seja, quem são as hamiltonianas H representando as interações fundamentais.

- O objetivo primário é descobrir quais são as leis da física, ou seja, quem são as hamiltonianas H representando as interações fundamentais.
- Não conhecemos H, porém o 2º postulado diz que H deve ser invariante por transformações (Λ, a). Vamos utilizar esta invariância para afunilar as possibilidades de H [3].

- O objetivo primário é descobrir quais são as leis da física, ou seja, quem são as hamiltonianas H representando as interações fundamentais.
- Não conhecemos H, porém o 2º postulado diz que H deve ser invariante por transformações (Λ, a). Vamos utilizar esta invariância para afunilar as possibilidades de H [3].

Dado um sistema físico "S"em um estado Ψ em O, no referencial $\bar{O}$ "S"vai estar no estado $\bar{\Psi}$, porém

$$|(\Phi, \Psi)| = |(\bar{\Phi}, \bar{\Psi})|, \tag{2}$$

se Φ e $\bar{\Phi}$ representam outro estado de "S"para O e $\bar{O}$ respectivamente.

Considere que em O

$$\Psi = \int d^3p\, g(\mathbf{p})\, \Phi_{\mathbf{p}}, \tag{3}$$

e para $\bar{O}$ o sistema está em $\bar{\Psi}$. Se $\bar{O} = RO$, quando uma medida é feita e O anota momento p^i, para $\bar{0}$ o momento é $\bar{p}^i = R^i{}_j p^j$. Logo $N^O_{p^i} = N^{\bar{O}}_{\bar{p}^i}$ e

$$\frac{N^O_{p^i}}{N} = \frac{N^{\bar{O}}_{\bar{p}^i}}{N} \to |(\Phi_{\mathbf{p}}, \Psi)| = |(\bar{\Phi}_{\mathbf{p}}, \bar{\Psi})|, \tag{4}$$

onde $\bar{\Phi}_{\mathbf{p}} = \Phi_{\bar{\mathbf{p}}}$. Mudanças de referencial preservam as transições de probabilidade.

Considere que em O

$$\Psi = \int d^3p \, g(\mathbf{p}) \, \Phi_{\mathbf{p}}, \tag{3}$$

e para $\bar{O}$ o sistema está em $\bar{\Psi}$. Se $\bar{O} = RO$, quando uma medida é feita e O anota momento p^i, para $\bar{0}$ o momento é $\bar{p}^i = R^i{}_j p^j$. Logo $N^{O}_{p^i} = N^{\bar{O}}_{\bar{p}^i}$ e

$$\frac{N^{O}_{p^i}}{N} = \frac{N^{\bar{O}}_{\bar{p}^i}}{N} \to |(\Phi_{\mathbf{p}}, \Psi)| = |(\bar{\Phi}_{\mathbf{p}}, \bar{\Psi})|, \tag{4}$$

onde $\bar{\Phi}_{\mathbf{p}} = \Phi_{\bar{\mathbf{p}}}$. Mudanças de referencial preservam as transições de probabilidade.

Teorema de Wigner: Sempre é possível definir operadores $U(O, \bar{O})$ lineares e unitários ou anti-lineares e antiunitários tais que $\bar{\Psi} = U(O, \bar{O})\Psi$

- Sistemas isolados não fornecem diferença entre referenciais inerciais, nesses casos $U(O, \bar{O}) = U(T)$.

- Sistemas isolados não fornecem diferença entre referenciais inerciais, nesses casos $U(O,\bar{O}) = U(T)$.
- A fim de impor invariância relativística nos sistemas físicos vamos procurar pelos operadores representando o grupo de Poincaré.

- Sistemas isolados não fornecem diferença entre referenciais inerciais, nesses casos $U(O, \bar{O}) = U(T)$.
- A fim de impor invariância relativística nos sistemas físicos vamos procurar pelos operadores representando o grupo de Poincaré.

Primeiro olhamos para transformações infinitesimais de Poincaré:

$$x`^{\mu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu})x^{\nu} + \epsilon^{\mu} \tag{5}$$

os parâmetros caracterizando a transformação infinitesimal são $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e ϵ_{μ}.

Porque o ortócrono próprio é um grupo suave (grupo de Lie Conexo) os $U(T)$ podem ser expandidos em uma série de potências

$$U = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} + \cdots \tag{6}$$

onde P^{μ} e $J^{\mu\nu}$ são operadores hermitianos.

$$U = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu + \cdots \tag{6}$$

onde P^μ e $J^{\mu\nu}$ são operadores hermitianos.
Exigindo que a lei de composição seja satisfeita obtemos

$$i\,[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}, \tag{7}$$
$$i\,[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho, \tag{8}$$
$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \tag{9}$$

Destas relações de comutação obtemos as leis de conservação usuais para sistemas isolados.

Estados de uma partícula

- Estamos interessados em partículas, por partículas queremos dizer sistemas físicos cujo único observável contínuo é o quadrimomento. Por exemplo o próton tem quadrimomento, carga e spin.
- Vamos investigar como os estados de uma partícula se transformam pelo ortócrono próprio.

Estados de uma partícula

- Estamos interessados em partículas, por partículas queremos dizer sistemas físicos cujo único observável contínuo é o quadrimomento. Por exemplo o próton tem quadrimomento, carga e spin.
- Vamos investigar como os estados de uma partícula se transformam pelo ortócrono próprio.

Dada a base $\Psi_{p,\sigma}$, sobre uma translação qualquer temos

$$U(1, a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-iP\cdot a}\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip\cdot a}\Psi_{p,\sigma}. \tag{10}$$

Estados de uma partícula

- Estamos interessados em partículas, por partículas queremos dizer sistemas físicos cujo único observável contínuo é o quadrimomento. Por exemplo o próton tem quadrimomento, carga e spin.
- Vamos investigar como os estados de uma partícula se transformam pelo ortócrono próprio.

Dada a base $\Psi_{p,\sigma}$, sobre uma translação qualquer temos

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-iP\cdot a}\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip\cdot a}\Psi_{p,\sigma}. \tag{10}$$

Por uma transformação de Lorentz homogênea temos

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma}, \tag{11}$$

Estados de uma partícula

Notemos que sempre é possível obter (11) de duas transformações consecutivas:

$$\Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma`\sigma}\Psi_{k,\sigma`} + \Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \Psi_{\Lambda p,\sigma`}, \qquad (12)$$

onde k^{μ} é algum quadrimomento da partícula e o conjunto de $D's$ forma um grupo chamado de little group.

Estados de uma partícula

Notemos que sempre é possível obter (11) de duas transformações consecutivas:

$$\Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma`\sigma} \Psi_{k,\sigma`} + \Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \Psi_{\Lambda p,\sigma`}, \tag{12}$$

onde k^μ é algum quadrimomento da partícula e o conjunto de $D's$ forma um grupo chamado de little group.

Dado um $\Psi_{p,\sigma}$ e uma transformação Λ podemos encontrar $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ se soubermos dividir Λ em D mais um boost.

Estados de uma partícula

Notemos que sempre é possível obter (11) de duas transformações consecutivas:

$$\Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\Psi_{k,\sigma'} + \Psi_{k,\sigma} \longrightarrow \Psi_{\Lambda p,\sigma'}, \tag{12}$$

onde k^μ é algum quadrimomento da partícula e o conjunto de $D's$ forma um grupo chamado de little group.

Dado um $\Psi_{p,\sigma}$ e uma transformação Λ podemos encontrar $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ se soubermos dividir Λ em D mais um boost.

Para algumas partículas é natural identificar seus espaços de Hilbert com representações irredutíveis de Poincaré, ou seja, não existe σ tal que

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \Psi_{\Lambda p,\sigma}, \tag{13}$$

para todo Λ. Consequentemente a representação do Little group também deve ser irredutível.

Partículas massivas

- Se escolhemos $k^{\mu} = (m, 0, 0, 0)$ então o little group é $SO(3)$. De M.Q.: as representações irredutíveis de $SO(3)$ possuem dimensão $2j + 1$, onde j é o momento angular.
- Para partículas massivas o único observável além do quadrimomento é o momento angular intrínseco, ou spin e partículas distintas possuem spin distintos e fornecem representações irredutíveis para $S0(3)$.
- Para construir a equação de campo livre associada a partículas, ou a Hamiltoniana em termos de operadores de criação e aniquilação é necessário saber como a partícula se transforma por Poincaré.

Partículas sem massa

- Se escolhemos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ o little group são rotações em torno da direção z mais "translações no plano" geradas por A e B, onde

$$A = J_2 + K_1 \tag{14}$$
$$B = -J_1 + K_2. \tag{15}$$

e a álgebra do little group é

$$[A, B] = 0, \tag{16}$$
$$[J_3, B] = -iA, \tag{17}$$
$$[J_3, A] = +iB. \tag{18}$$

Partículas sem massa

- Se escolhemos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ o little group são rotações em torno da direção z mais "translações no plano" geradas por A e B, onde

$$A = J_2 + K_1 \quad (14)$$
$$B = -J_1 + K_2. \quad (15)$$

e a álgebra do little group é

$$[A, B] = 0, \quad (16)$$
$$[J_3, B] = -iA, \quad (17)$$
$$[J_3, A] = +iB. \quad (18)$$

- Para partículas sem massa o único observável é o quadrimomento. Os estados de uma partícula são $\Psi_{p,\sigma}$ onde σ assume apenas um valor para todo p^μ

Partículas sem massa

- O operador paridade atuando em estados de partícula sem massa leva helicidade σ em helicidade $-\sigma$, para teorias que são invariantes por paridade além do ortócrono próprio as partículas sem massa formam representações irredutíveis de todo o Poincaré e possuem duas helicidades.

Bibliografia

- Steven Weinberg, “The Quantum Theory of Fields, vol.1”
- L. Fonda and G.C Ghiardi, ’Symmetry Principles in Quantum Physics”
- Wigner, E.P. Relativistic invariance in quantum mechanics. Nuovo Cim 3, 517–532 (1956).