

Renormalização no modelo de Ising

Seminário para o curso de TQC I

Pedro Fittipaldi de Castro

15 de dezembro de 2020



O que é o grupo de renormalização?

Ferromagneto em 1-D

Ferromagneto em 2-D

O que é o grupo de renormalização?

Ferromagneto em 1-D

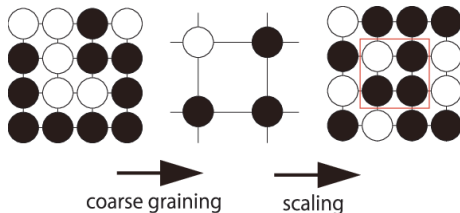
Ferromagneto em 2-D

Grupo de Renormalização (RG)

- ▶ Sistema \rightarrow graus de liberdade, escalas de distância e um conjunto de parâmetros.
- ▶ Transformação do grupo de renormalização: duas etapas.

Grupo de Renormalização (RG)

- ▶ Sistema \rightarrow graus de liberdade, escalas de distância e um conjunto de parâmetros.
- ▶ Transformação do grupo de renormalização: duas etapas.
 1. Reduzir os graus de liberdade do sistema (**coarse grain**).
 2. Reescalar as distâncias para recuperar o quadro original.



Invariância de escala

- ▶ Se, após uma transformação do GR, os parâmetros permanecem iguais, o sistema possui **invariância de escala**.
- ▶ A configuração do sistema na qual a invariância ocorre é chamada **ponto fixo** ou **crítico**.

Roteiro da apresentação

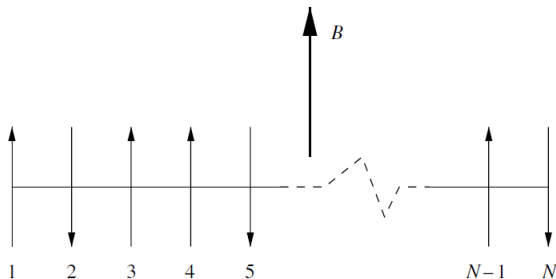
O que é o grupo de renormalização?

Ferromagneto em 1-D

Ferromagneto em 2-D

Modelo de Ising em 1-D

- ▶ **Graus de liberdade:** rede de N spins S_1, \dots, S_N . $S_i = \pm 1$.
- ▶ **Escalas:** parâmetro de rede a , tamanho L .
- ▶ **Parâmetros:** temperatura T , campo B , acoplamento J .



Hamiltoniana do modelo

- ▶ Na ausência de campo magnético externo,

$$H(S_1, \dots, S_N) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} S_i S_j, \quad J_{ij} > 0.$$

- ▶ J_{ij} depende da distância entre os spins.

Hamiltoniana do modelo

- ▶ Na ausência de campo magnético externo,

$$H(S_1, \dots, S_N) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} S_i S_j, \quad J_{ij} > 0.$$

- ▶ J_{ij} depende da distância entre os spins.
- ▶ **Aproximação:** interação entre primeiros vizinhos.

$$\longrightarrow H(S_1, \dots, S_N) = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}, \quad J > 0$$

- ▶ Função de partição

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-H/kT} = \sum_{\{S\}} \exp \left(\frac{J}{kT} \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} \right)$$

- ▶ Função de partição

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-H/kT} = \sum_{\{S\}} \exp \left(\frac{J}{kT} \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} \right)$$

- ▶ Definimos a **constante de acoplamento**

$$K = \frac{J}{kT}$$

e fatoramos a exponencial:

$$Z(K) = \sum_{\{S\}} \prod_{i=1}^N \exp(K S_i S_{i+1})$$

- ▶ Distribuição de probabilidade

$$P(\{S\}) = \frac{1}{Z(K)} \exp \left(K \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} \right).$$

- ▶ Distribuição de probabilidade

$$P(\{S\}) = \frac{1}{Z(K)} \exp \left(K \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} \right).$$

- ▶ Fatoramos a exponencial

$$P(\{S\}) = \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^N e^{KS_{2i}(S_{2i-1}+S_{2i+1})}$$

Transformações do GR

- **Coarse-graining:** Vamos "traçar" os spins pares para fora da distribuição:

$$\begin{aligned}\sum_{S_2, S_4, \dots = \pm 1} P(\{S_i\}) &= \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^N \left[e^{K(S_{2i-1} + S_{2i+1})} + e^{-K(S_{2i-1} + S_{2i+1})} \right] \\ &= \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^N 2 \cosh [K(S_{2i-1} + S_{2i+1})]\end{aligned}$$

Transformações do GR

- ▶ **Coarse-graining:** Vamos "traçar" os spins pares para fora da distribuição:

$$\begin{aligned}\sum_{S_2, S_4, \dots = \pm 1} P(\{S_i\}) &= \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^N \left[e^{K(S_{2i-1} + S_{2i+1})} + e^{-K(S_{2i-1} + S_{2i+1})} \right] \\ &= \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^N 2 \cosh [K(S_{2i-1} + S_{2i+1})]\end{aligned}$$

- ▶ **Reescalamento:** $(2i - 1)$ -ésimo sítio da antiga rede
→ i -ésimo sítio da nova rede ($2a \rightarrow a$).

$$P'(\{S_i\}) = \frac{1}{Z(K)} \prod_{i=1}^{N/2} 2 \cosh [K(S_i + S_{i+1})] \quad (1)$$

Invariância da distribuição de probabilidade

- ▶ Queremos escrever

$$P'(\{S_i\}) = \frac{1}{Z'(K')} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' S_i S_{i+1}} \quad (2)$$

Invariância da distribuição de probabilidade

- ▶ Queremos escrever

$$P'(\{S_i\}) = \frac{1}{Z'(K')} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' S_i S_{i+1}} \quad (2)$$

- ▶ Igualando (1) e (2), temos

Invariância da distribuição de probabilidade

- ▶ Queremos escrever

$$P'(\{S_i\}) = \frac{1}{Z'(K')} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' S_i S_{i+1}} \quad (2)$$

- ▶ Igualando (1) e (2), temos

- ▶ Caso I: $S_i = -S_{i+1} \Rightarrow Z'(K') = \left(2e^{K'}\right)^{-N/2} Z(K)$.

Invariância da distribuição de probabilidade

- ▶ Queremos escrever

$$P'(\{S_i\}) = \frac{1}{Z'(K')} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' S_i S_{i+1}} \quad (2)$$

- ▶ Igualando (1) e (2), temos

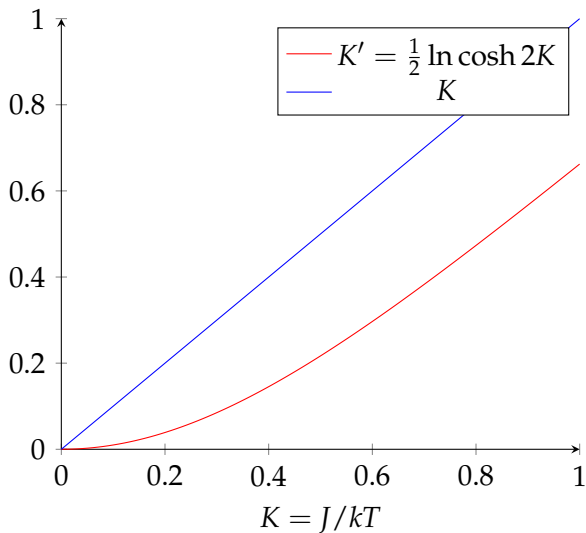
- ▶ Caso I: $S_i = -S_{i+1} \Rightarrow Z'(K') = \left(2e^{K'}\right)^{-N/2} Z(K)$.

- ▶ Caso II: $S_i = S_{i+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cosh^{N/2} 2K &= e^{NK'} \\ \Rightarrow K' &= \frac{1}{2} \ln \cosh 2K. \end{aligned} \quad (3)$$

Renormalização da constante de acoplamento!

Constantes que mudam



Renormalização da função de partição

- ▶ Encarando Z como função tanto do acoplamento como do número de partículas, temos

$$Z(N, K) = \sum_{S_1, \dots, S_N} \prod_{i=1}^N e^{KS_i S_{i+1}}$$

$$\text{e } Z(N/2, K') = \sum_{S_1, \dots, S_{N/2}} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' S_i S_{i+1}} = Z'(K').$$

- ▶ Usando a relação

$$Z'(K') = \left(2e^{K'}\right)^{-N/2} Z(K) = \left(2 \cosh^{1/2} 2K\right)^{-N/2} Z(K),$$

vem

$$Z(N/2, K') = \left(2 \cosh^{1/2} 2K\right)^{-N/2} Z(N, K). \quad (4)$$

Roteiro da apresentação

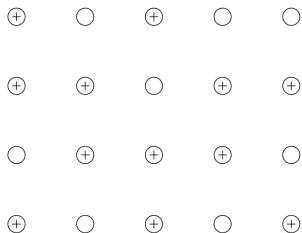
O que é o grupo de renormalização?

Ferromagneto em 1-D

Ferromagneto em 2-D

Modelo de Ising em 2-D

► Rede de spins

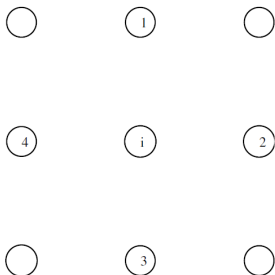


► Distribuição de probabilidade

$$P(\{S\}) = \frac{1}{Z(K)} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j\right)$$

Coarse-graining

- ▶ Escolhamos um sítio i



- ▶ Separemos os fatores envolvendo i :

$$P(\{S\}) = \frac{\exp[K(S_1 S_i + S_2 S_i + S_3 S_i + S_4 S_i))] \times B}{Z}.$$

Coarse-graining

- ▶ “Traçando” este sítio para fora, temos

$$\sum_{S_i=\pm 1} P(\{S\}) = 2 \cosh[K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)] \frac{B}{Z}.$$

Coarse-graining

- ▶ “Traçando” este sítio para fora, temos

$$\sum_{S_i=\pm 1} P(\{S\}) = 2 \cosh[K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)] \frac{B}{Z}.$$

- ▶ Fazemos o mesmo para o resto da rede:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{S_i=\pm 1} P(\{S\}) &= \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N/2} 2 \cosh[K(S_{i1} + S_{i2} + S_{i3} + S_{i4})] \\ &= \frac{1}{Z'} \prod_{i=1}^{N/2} \exp(\ln \cosh[K(S_{i1} + S_{i2} + S_{i3} + S_{i4})]) =: P'(\{S\}) \end{aligned} \tag{5}$$

Renormalização

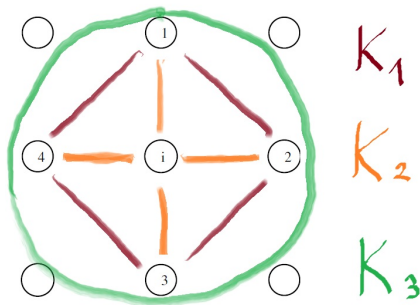
- ▶ Em 2-D, a distribuição não preserva a forma funcional. O melhor que podemos fazer é

$$P'(\{S\}) = \frac{1}{Z'} \prod_{i=1}^{N/2} \exp\{K_1(S_{i1}S_{i2} + S_{i2}S_{i3} + S_{i3}S_{i4} + S_{i4}S_{i1}) \\ + K_2(S_{i1}S_{i3} + S_{i2}S_{i4}) + K_3(S_{i1}S_{i2}S_{i3}S_{i4})\} \quad (6)$$

Renormalização

- ▶ Em 2-D, a distribuição não preserva a forma funcional. O melhor que podemos fazer é

$$P'(\{S\}) = \frac{1}{Z'} \prod_{i=1}^{N/2} \exp\{K_1(S_{i1}S_{i2} + S_{i2}S_{i3} + S_{i3}S_{i4} + S_{i4}S_{i1}) + K_2(S_{i1}S_{i3} + S_{i2}S_{i4}) + K_3(S_{i1}S_{i2}S_{i3}S_{i4})\} \quad (6)$$



Renormalização

- ▶ Igualando as equações (5) e (6), obtemos os valores das novas constantes de acoplamento:

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K$$

$$K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K$$

$$K_3 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K - \frac{1}{2} \ln \cosh 2K.$$

Renormalização

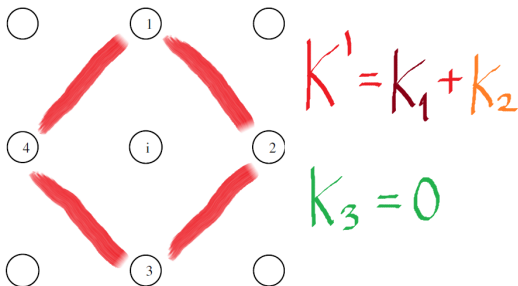
- ▶ Igualando as equações (5) e (6), obtemos os valores das novas constantes de acoplamento:

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K$$

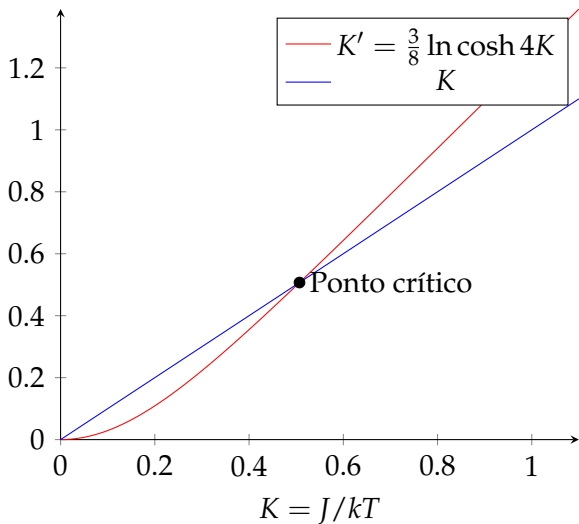
$$K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K$$

$$K_3 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K - \frac{1}{2} \ln \cosh 2K.$$

- ▶ Aproximação



Constantes que mudam (II)



Transição de fase

- ▶ K_c exato = 0.441
- ▶ K_c aprox. = 0.507

Transição de fase

- ▶ K_c exato = 0.441
- ▶ K_c aprox. = 0.507
- ▶ **Comprimento de correlação:** $\xi(T) \leftarrow \langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi(T)}}$.
- ▶ Depende do acoplamento K

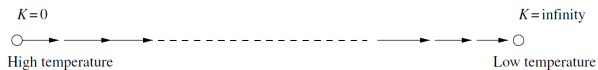
Transição de fase

- ▶ K_c exato = 0.441
- ▶ K_c aprox. = 0.507
- ▶ **Comprimento de correlação:** $\xi(T) \leftarrow \langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi(T)}}$.
- ▶ Depende do acoplamento K
- ▶ $\xi(T_c) \rightarrow \infty$

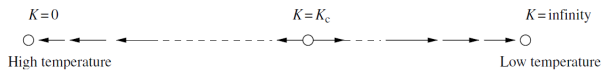
▶ Simulação

Ising 1-D vs 2-D

▶ 1-D:

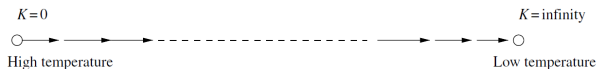


▶ 2-D:



Ising 1-D vs 2-D

► 1-D:



► 2-D:

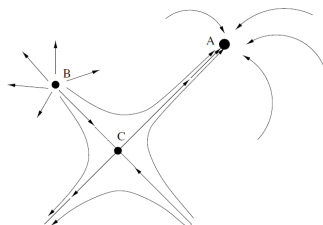
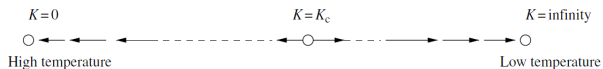


FIG. 8.2 Types of fixed point: A attractive; B repelling; C mixed.

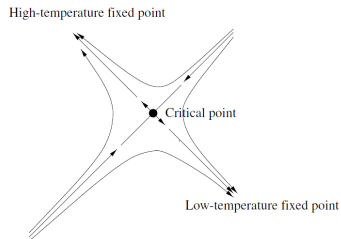






FIG. 8.3 Critical fixed point.

Referências I

-  Douglas Ashton, *The renormalization group - simulação*.
-  Simon DeDeo, *Introduction to renormalization*.
-  Nigel Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and renormalization group*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
-  W. D. McComb, *Renormalization methods: a guide for beginners*, Oxford University Press, Great Clarendon Street, Orxford 0X2 6DP, 2004.