Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista

Fermions de Majorana

Wescley de Carvalho Dimas
Teoria Quântica de Campos I

14 de dezembro de 2020

Outline

Por que Majorana?

- Fermions foram propostos por Dirac em 1928.
- Em 1929 Weyl mostra que para fermions sem massa, haveria uma equação mais simples.
- Em 1930 Pauli propõe neutrinos para explicar o espectro contínuo de energia no decaimento beta.
- Havia a possibilidade de que neutrinos fossem suas proprias antipartículas, essa descrição foi desenvolvida por Majorana em 1937.
- Fermions de Majorana são mais simples que os de Dirac.

O que são fermions de Majorana?

- Lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi \tag{1}$$

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$$

onde as matrizes γ^μ satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{2}$$

- Equação de Dirac

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi = 0 \tag{3}$$

- Soluções da Eq. 3 -> Campos Fermionicos

Representação de Majorana

- Majorana encontrou matrizes γ^μ tal que eq. 3 seja real

$$\widetilde{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

- É possível encontrar soluções

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}^* \tag{5}$$

Representação de Majorana

- As matrizes γ^μ não são únicas

$$\gamma^\mu = U\widetilde{\gamma}^\mu U^\dagger \tag{6}$$

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \tag{7}$$

com U representando uma transformação unitária.

- Definindo

$$UU^T = \gamma_0 C \tag{8}$$

com $C^T = -C$

- Condição de realidade

$$\psi = \gamma_0 C\psi^* \tag{9}$$

Helicidade

- Helicidade está ligado com momento angular e momento linear

$$h_{\boldsymbol{p}} = \frac{2\boldsymbol{J}.\boldsymbol{p}}{p} \tag{10}$$

- Se o spin está na mesma direção do momento linear, a helicidade é positiva. Se está na direção oposta, a helicidade é negativa.
- É conservada ao longo do tempo para uma partícula livre.
- É invariante por rotações, mas não por boosts.

Quiralidade

- A quiralidade é dividida em mão-esquerda e mão-direita
- A partir da matriz γ^5

$$\left\{\gamma_5, \gamma_\mu\right\} = 0 \quad , \quad \forall \mu \tag{11}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{12}$$

temos os projetores

$$L = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_5\right) \quad , \quad R = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5\right) \tag{13}$$

Quiralidade

- Assim temos os mão-esquerda e mão-direita

$$\Psi_L = L\Psi \qquad \Psi_R = R\Psi \tag{14}$$

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \tag{15}$$

- Não é conservada para uma partícula livre.
- Quiralidade é mantida em transformações de Lorentz

Fermions de Weyl

- Grupo de Lorentz isomórfico a $SU(2) \times SU(2)$
- Férmion de Weyl de mão esquerda transforma como $(\frac{1}{2}, 0)$, e de mão direita como $(0, \frac{1}{2})$
- Um campo fermiônico numa representação irredutível deve transformar como $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$
- Fermions de Weyl servem como base pra construção de campos fermionicos

Fermion de Majorana

- É possível construir fermions de Majorana a partir de fermions de Weyl
- É necessário de mão-esquerda e de mão-direita, ainda respeitando a eq. 9
- Um fermion de Weyl de mão-esquerda satisfaz

$$(1 + \gamma_5)\chi = 0 \tag{16}$$

- O de mão direita satisfaz

$$(1 - \gamma_5)\widehat{\chi} = 0 \tag{17}$$

Fermions de Majorana

- Também é verdade que

$$\widehat{\left(\widehat{\Psi}\right)} = \Psi \tag{18}$$

- Com isso construimos um campo fermiônico

$$\psi(x) = \chi(x) + \widehat{\chi}(x) \tag{19}$$

- Fermions de Weyl não podem ter massa enquanto os de Majorana sim. Como?

Fermions de Majorana

- A massa não foi gerada.
- O termo de massa na lagrangiana de Dirac (eq. 1) é da forma $\overline{\Psi}\Psi$
- Usando os projetores L e R apenas termos cruzados sobrevivem
- Para que tenha massa, o campo fermiônico deve ter ambos tipos de quiralidade

Notação de 2 componentes

- A lagrangiana eq. 1 tem uma Hamiltoniana

$$H = \gamma^0 \left(\gamma^i p^i + m\right) \tag{20}$$

  onde, para teorias sem massa, apenas existe um termo do tipo $\gamma^0\gamma^i = \alpha^i$
- O termo α^i segue a relação de anticomutação

$$\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\} = 2\delta^{ij} \tag{21}$$

- Nessa representação a solução da equação de Dirac é um objeto de 2 componentes

Notação de 2 componentes

- Quando não há massa, quiralidade e helicidade coincidem. Autoestados de helicidade são definidos

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p}}{p}\xi_{\pm}(p) = \pm\xi_{\pm}(p) \tag{22}$$

- ξ_+é autoestado de mão direita e ξ_- de mão esquerda.

Representação Quiral

- É conveniente utilizar a representação quiral onde as matrizes de Dirac são da forma

$$\breve{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \breve{\gamma}^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

e a matriz γ^5

$$\breve{\gamma}_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

- De forma que os operadores de projeção

$$\breve{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \breve{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

- Podemos introduzir um campo fermiônico

$$\breve{\Psi} = \begin{bmatrix} \xi_t \\ \xi_b \end{bmatrix} \tag{26}$$

- De forma que a lagrangiana de Dirac possa ser escrita

$$\mathcal{L} = i\xi_t^\dagger \left(\partial_0 - \sigma^k \partial_k\right) \xi_t + i\xi_b^\dagger \left(\partial_0 + \sigma^k \partial_k\right) \xi_b \tag{27}$$

Fermions de Majorana

- Como construir fermions de Majorana na representação de 2-componentes?
- Começando pela matriz $\breve{U}$

$$\breve{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sigma^2 & -i(1-\sigma^2) \\ i(1-\sigma^2) & 1+\sigma^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Fermions de Majorana

- Na representação de Majorana são 4 componentes reais
- Utilizando a eq. 7 e a matriz $\breve{U}$

$$\breve{\psi} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\widetilde{\psi_1} + \widetilde{\psi_4}\right) - i\left(\widetilde{\psi_2} + \widetilde{\psi_3}\right) \\ \left(\widetilde{\psi_2} - \widetilde{\psi_3}\right) + i\left(\widetilde{\psi_1} - \widetilde{\psi_4}\right) \\ -\left(\widetilde{\psi_2} - \widetilde{\psi_3}\right) + i\left(\widetilde{\psi_1} - \widetilde{\psi_4}\right) \\ \left(\widetilde{\psi_1} + \widetilde{\psi_4}\right) + i\left(\widetilde{\psi_2} + \widetilde{\psi_3}\right) \end{pmatrix} \tag{29}$$

- É possível obter todas as componentes $\widetilde{\psi}$ apenas das duas componentes superiores de $\breve{\psi}$

- Na representação quiral

$$\breve{\gamma}_0 \breve{C} = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

- Utilizando a notação de 2-componentes, obtemos a relação entre as componentes para um fermion de Majorana

$$\xi_b = -i\sigma^2 \xi_t^* \ , \quad \xi_t = i\sigma^2 \xi_b^* \tag{31}$$

- Então um campon fermiônico de Majorana pode ser escrito

$$\breve{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \omega(x) \\ -i\sigma^2 \omega^*(x) \end{bmatrix} \tag{32}$$

- Nesta representação, a lagrangiana do campo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\omega^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \omega - m\omega^T \sigma^2 \omega\right) \tag{33}$$

- Com equação de movimento

$$\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \omega + m\sigma^2 \omega^* = 0 \tag{34}$$

- Para linhas internas, o propagador de um cmapo de Dirac é dado por

$$S_p(\Psi_a, \overline{\Psi}_b) = \frac{\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)_{ab}}{p^2 - m^2} \tag{35}$$

com os indices a,b representando os elementos de matriz.
- Para fermions de Weyl, a massa é zero.

- Para fermions de Majorana há uma diferença.
- O fermion de Majorana é sua própria antipartícula.
- Lembrando

$$\psi^T = \overline{\psi} C \rightarrow \psi_b = \overline{\psi}_d C_{db} \tag{36}$$

portanto

$$S_p(\psi_a, \psi_b) = S_p(\psi_a, \overline{\psi}_d) C_{db} = \frac{\big((\gamma^\mu p_\mu + m) C\big)_{ab}}{p^2 - m^2} \tag{37}$$

Regras de Feynman

- Para linhas externas a argumentação é semelhante, de modo geral temos

Type of fermion	Feynman rule for			
	incoming		outgoing	
	with ψ	with $\overline{\psi}$	with ψ	with $\overline{\psi}$
Dirac particle	$\sum_s u_s(\boldsymbol{p})$	0	0	$\sum_s \overline{u}_s(\boldsymbol{p})$
Dirac antiparticle	0	$\sum_s \overline{v}_s(\boldsymbol{p})$	$\sum_s v_s(\boldsymbol{p})$	0
Majorana	$\sum_s u_s(\boldsymbol{p})$	$e^{-i\alpha}\sum_s \overline{v}_s(\boldsymbol{p})$	$e^{i\alpha}\sum_s v_s(\boldsymbol{p})$	$\sum_s u_s(\boldsymbol{p})$
LH Weyl particle	$u_L(\boldsymbol{p})$	0	0	$\overline{v}_R(\boldsymbol{p})$
antiparticle of LH Weyl	0	$\overline{v}_R(\boldsymbol{p})$	$v_L(\boldsymbol{p})$	0

Figura: Resumo de regras de Feynman para tipos de fermions.

Um exemplo

- Considere a interação

$$\mathcal{L}_{int} = g\phi\overline{\Psi}F\Psi \tag{38}$$

onde g é a constante de acoplamento, ϕ um campo bosônico, F uma matrix 4x4 e Ψ o campo fermiônico.

- Se Ψ representar um fermion de Dirac, um resultado possível é

$$\mathcal{M} = g\sum_{s_1,s_2}\overline{u}_{s_1}(p_1)Fv_{s_2}(p_2) \tag{39}$$

- Neste caso o operador $\overline{\Psi}$ cria a partícula e Ψ a antipartícula

Um exemplo

- Entretanto, se representar um fermion de Majorana

$$\mathcal{M} = g \sum_{s_1, s_2} \left(\overline{u}_{s_1}(p_1) F v_{s_2} - \overline{u}_{s_2}(p_2) F v_{s_1}(p_1) \right) \tag{40}$$

- Ambos operadores podem criar tanto a partícula quanto a antipartícula
- Sinal relativo vem da anticomutação dos campos fermiônicos

Referências

Daniel V. Schroeder Michael E. Peskin (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company.

Palash B. Pal (2010). “Dirac, Majorana and Weyl fermions”. Em: *arXiv:1006.1718*.