Teoria de Campos Conformes

Seminário para o curso de QFT I

Bruno Rodrigues Soares

Dezembro 2021

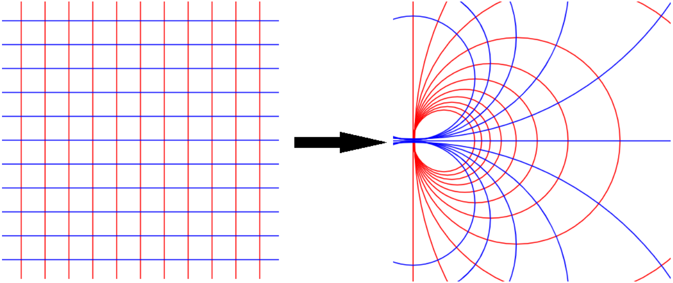
Definição e Motivações

Considerando uma métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, ..., +1, ...)$.

Uma **transformação conforme** φ é caracterizada por:

$$\partial_\mu x'^\alpha \partial_\nu x'^\beta \eta_{\alpha\beta} = \Lambda(x)\eta_{\mu\nu} \tag{1}$$

Onde $x' \equiv \varphi(x)$



Definição e Motivações

Aplicações em:

- Modelos estatísticos: Transições de Fase [2]
- Teoria de Cordas: Espaço interno bi-dimensional [3]

Álgebra Conforme em $d > 2$

- $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ e (1), resultam na condição:

$$[\eta_{\mu\nu} \Box \eta + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu](\partial\epsilon) = 0, \tag{2}$$

onde $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$.Portanto:

$$\epsilon_\mu(x) \equiv a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\lambda} x^\nu x^\lambda, \tag{3}$$

Em que $a_\mu, b_{\mu\nu}$ e $c_{\mu\nu\lambda}$ são constantes infinitesimais, e $c_{\mu\nu\lambda} = c_{\mu\lambda\nu}$.
OBS.:

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu} \tag{4}$$

Álgebra Conforme em $d > 2$

- Em ordem zero:

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu \;\longleftrightarrow\; -i\partial_\mu \;\;\text{(translação)} \tag{5}$$

- Ordem linear:

$$x'_\mu = (1+\alpha)x_\mu \;\longleftrightarrow\; -ix^\mu\partial_\mu \;\;\text{(Dilatação)} \tag{6}$$

$$x'_\mu = (\delta^\nu_\mu + a_\mu{}^\nu)x_\nu, \;\longleftrightarrow\; i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \;\;\text{(Rotação)} \tag{7}$$

- Ordem quadrática:

$$x'_\mu = x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu, \;\longleftrightarrow\; -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^\nu x_\nu\partial_\mu) \;\;\text{(SCT)} \tag{8}$$

Para $\mathbb{R}^{d-1,1}$, por exemplo, temos: $\mathfrak{so}(d,2)$

Transformação conforme em d = 2

Redefinindo $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^{2,0}$ em termos de:

$$z := x^0 + ix^1$$

.

No plano complexo:

$$z' = z + f(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z^{n+1}) \epsilon_n \tag{9}$$

Com um gerador para cada $n \in \mathbb{Z}$, dado por:

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z \tag{10}$$

Álgebra de Witt:

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n} \tag{11}$$

Campos Primários e Tensor energia-momento

- Seja f uma transformação conforme:

$$\phi'(z,\bar{z}) \equiv (\partial_z f)^h (\partial_{\bar{z}} \bar{f})^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \tag{12}$$

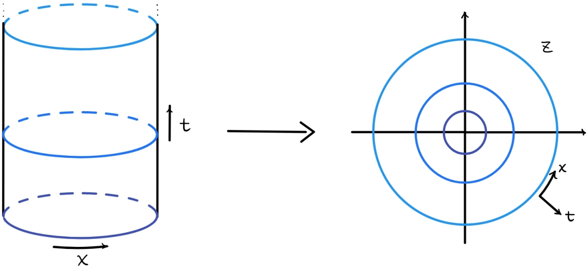
onde h,$\bar{h}$: dimensões conformes (ou anômalas) dos campos.

- Simetria por $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) \longrightarrow$ Corrente j_{μ}:

$$j_{\mu} =: T_{\mu\nu}\epsilon^{\nu} \tag{13}$$

$$\Rightarrow T^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{14}$$

Quantização Radial



- Campos primários:

$$\phi(z,\bar{z}) = \sum_{n,\bar{m}\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}}\phi_{n,\bar{m}} \tag{15}$$

- Espaço de Hilbert gerado por vácuo $|0\rangle$, tal que:

$$|h,\bar{h}\rangle := \lim_{z,\bar{z}\to 0}\phi(z,\bar{z})|0\rangle \tag{16}$$

Ordenamento Radial

- Campos primários são caracterizados por:

$$R\big(T(z)\phi(\omega)\big) = \frac{h}{(z-\omega)^2}\phi(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial_\omega\phi(\omega) + \ldots \tag{17}$$

- Para o Tensor E-M temos:

$$R\big(T(z)T(w)\big) = \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega T(\omega)}{(z-\omega)} + \ldots \tag{18}$$

- c: Carga Central

Álgebra de Virasoro

$$\begin{pmatrix} T_{zz} & T_{z\bar{z}} \\ T_{\bar{z}z} & T_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10}) \end{pmatrix} \tag{19}$$

- Sob transformações infinitesimais $\epsilon(z) \equiv \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{m+1}\epsilon_m$:

$$Q_\epsilon \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint dz T(z)\epsilon(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \epsilon_m L_m \tag{20}$$

Onde

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \tag{21}$$

- OPE (18) equivale à comutação entre modos de Laurent:

$$[L_m, L_n] = \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} + (m-n)L_{m+n} \tag{22}$$

Representação da Álgebra de Virasoro

Definição

Um **Módulo de Verma** é um espaço vetorial complexo $M(c,h)$, caracterizado por dois números $h, c \in \mathbb{C}$. Juntamente com um homomorfismo $\rho : Vir \to End_{\mathbb{C}}\big(M(c,h)\big)$, e um vetor $|h\rangle \in M(c,h)$, tal que:

$$\rho(c)|h\rangle = c|h\rangle, \tag{23}$$

$$\rho(L_0)|h\rangle = h|h\rangle, \tag{24}$$

$$\rho(L_n)|h\rangle = 0, \quad \forall n > 0. \tag{25}$$

- $\{\rho(L_{-n_1})...\rho(L_{-n_k})|h\rangle \mid n_1 \geq ... \geq n_k > 0,\ k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{|h\rangle\}$ base de M.
- Admite Forma Hermitiana $\langle\cdot|\cdot\rangle : M \times M \to \mathbb{C}$, para $c, h \in \mathbb{R}$.
- Condição de unitariedade restringe valores de c, h.

Funções de Correlação de 2 Pontos

$$G(z,w) \equiv \langle \phi_i(z), \phi_j(w) \rangle \tag{26}$$

- Translação $(f(z) = z + a)$:

$$G(z,w) = G(z-w)$$

- Dilatação$(f(z) = \lambda z)$:

$$G(z,w) = \lambda^{h_i+h_j} G(\lambda(z-w))$$

- SCT$(f(z) = \frac{-1}{z})$:

$$G(z,w) = \frac{1}{z^{2h_i}} \frac{1}{w^{2h_j}} G\left(\frac{-1}{z} + \frac{1}{w}\right)$$

Portanto:

$$G(z,w) = \langle \phi_i(z_i) \phi_j(z_j) \rangle = \frac{d_{ij} \delta_{h_i,h_j}}{(z_i - z_j)^{h_i+h_j}} \tag{27}$$

OPE's para campos Quasi-Primários

$$\phi_i(z,\bar{z})\phi_j(w,\bar{w}) = \sum_{p,\{k,\bar{k}\}} \frac{C_{ij}^{p}\beta_{ij}^{p\{k\}}\bar{\beta}_{ij}^{p\{\bar{k}\}}\phi_p^{\{k,\bar{k}\}}(w,\bar{w})}{(z-w)^{h_i+h_j-h_p-K}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j-\bar{h}_p+\bar{K}}}$$

- $\phi^{\{k,\bar{k}\}}$: Elementos da família conforme de ϕ_p
- $\beta_{ij}^{p\{k\}}$: Determinadas pelas dimensões conformes e carga central.
- C_{ij}^{p}: Requerem hipóteses adicionais.

Simetria Cruzada

Função de Correlação de 4-pontos:

$$G_{34}^{21}(x,\bar{x}) \equiv \lim_{w,\bar{w}\to 0}\langle\phi_1^{\dagger}(w,\bar{w})\phi_2(1,1)\phi_3(x,\bar{x})\phi_4(0,0)\rangle \tag{28}$$

Restrições impostas por:

$$G_{32}^{41}(1-x,1-\bar{x}) = G_{34}^{21}(x,\bar{x}) \tag{29}$$

$$x^{-2h_3}\bar{x}^{-2\bar{h}_3}G_{31}^{24}(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}}) = G_{34}^{21}(x,\bar{x}) \tag{30}$$

Determinam C_{ij}^{p} (Hipótese Bootstrap)

Expansão em Ondas parciais

É possível ainda escrever:

$$G^{21}_{34}(x,\bar{x}) = \sum_p C^p_{34} C^p_{12} \mathcal{A}^{21}_{34}(p|x,\bar{x}) \tag{31}$$

onde:

$$\mathcal{A}^{21}_{34}(p|x,\bar{x}) = \mathcal{F}^{21}_{34}(p|x)\bar{\mathcal{F}}^{21}_{34}(p|\bar{x}) \tag{32}$$

- $\mathcal{F}^{ji}_{kl}$ são chamados de Blocos Conformes.

Referências I

[1] A.A. Belavin and A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov
Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory.
Nuclear Physics B
Vol. 241, num. 2, pag. 333-380, ano 1984.

[2] Mussardo, Giuseppe
Statistical field theory : an introduction to exactly solved models in statistical physics.
Oxford University Press, 2010.

[3] Polchinski, Joseph
String Theory, Vol. I.
Cambridge University Press, 1998.

Referências II

[5] Blumenhagen, Ralph and Plauschinn, Erik
Introduction to conformal field theory: with applications to String theory.
doi: 10.1007/978 – 3 – 642 – 00450 – 6, Vol. 779, Ano: 2009.

[6] Schottenloher, Martin
A mathematical introduction to conformal field theory.
doi: 10.1007/978 – 3 – 540 – 68628 – 6, Vol. 759, Ano: 2008.