# O MODELO DE SINE-GORDON E SOLITONS

## 1. ROTEIRO

1. Modelo de SG
   - Características
   - Sólitons (kink, anti-kink, breather)

2. Sólitons Quantizados
   (ou "correções quânticas")

3. Outros tópicos
   - Sólitons em (d+1)-dimensões
   - Dualidade SG / Thirring massivo

4. Conclusão

5. Referências

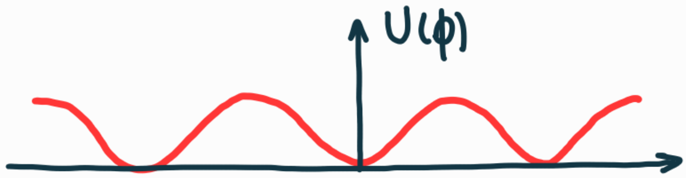
## 1. Modelo de SG

A Lagrangeana do modelo é,

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta\phi)}, \quad (\mu = 0,1)$$

• Vácuo degenerado

$$\phi = \frac{2n\pi}{\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



- Não estamos considerando tunelamento:
  WKB (MQ) / Instantons (TQC)

- Equação de movimento:

$$\boxed{\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + \frac{m^2}{\beta}\,\text{sen}\,\beta\phi = 0}$$

- Admite soluções exatas
  - Kinks (Erick Weinberg)
  - Lumps (Coleman)
  - Sólitons (NÓS)

## 1.a. Soluções estáticas

- Solução estática $\longleftrightarrow$ $\partial_t\phi = 0$

- A ação independente do tempo,

$$S = \int dx\,\mathcal{L} = \int dx\left\{\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + U(\phi)\right\}$$

daqui

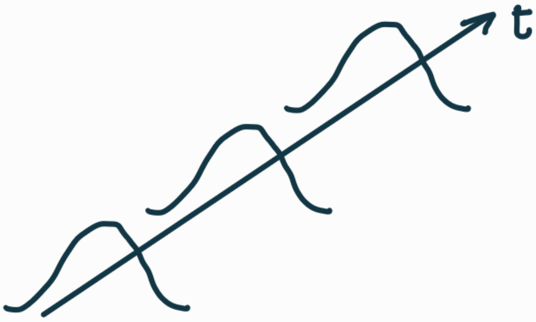
$$\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 = U(\phi) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x} = \pm\sqrt{2U(\phi)}}$$

kink/anti-kink

integrando obtemos

$$\boxed{\int\frac{d\phi}{\sqrt{2U(\phi)}} = \pm\int dx = \pm\Delta x}$$

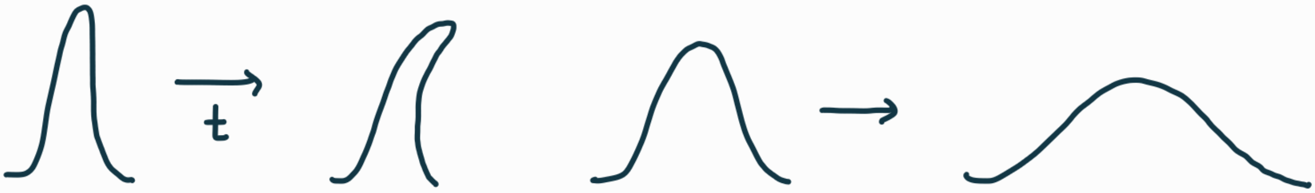
# 1.b. Sólitons




Principais características:

i) Energia finita, $E < \infty$

ii) Não-lineariedade + dispersão $\longrightarrow$ Estabilidade




iii) Comportamento corpuscular

iv) Princípio da superposição não-linear

Para o modelo SG, $U = \frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\phi)$:

$$\pm\Delta x = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2U(\phi)}} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\phi)}}$$

$$= \frac{\beta}{2m}\int \frac{d\phi}{\operatorname{sen}(\phi\beta/2)} \quad , \quad \begin{cases} \phi = \frac{2}{\beta}\operatorname{arcsen} t \\ d\phi = \frac{2}{\beta}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{cases}$$

$$= \frac{1}{m}\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{m}\tanh^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2m}\left\{\ln\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x) = \frac{4}{\beta}\tan^{-1} e^{\pm m\Delta x}}$$ (sóliton kink/anti-kink)

# Densidade de Energia do Sóliton

$$E = \int dx\, \mathcal{E} = \int dx \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2}_{=U(\phi)} + U(\phi) \right\} = \int dx \cdot 2U(\phi)$$

$$= \int dx\, \underbrace{\frac{2m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta\phi)}_{\mathcal{E}}$$

podemos computar analíticamente a energia para 1-sóliton,

$$E = \int dx\, (\partial_x \phi)^2 = \int dx\, \frac{1}{2} \frac{16}{\beta^2} \frac{4m^2 e^{\pm \Delta x}}{(1+e^{\pm 2m\Delta x})}$$

$$= \frac{16m}{\beta^2}\left[\frac{1}{(1+e^{\pm 2m\Delta x})}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{16m}{\beta^2}$$

$$\boxed{E_{kink} = E_{\substack{anti\\kink}} = \frac{16m}{\beta^2}}$$

# Invariância sob transf. de Lorentz

$$x \longrightarrow \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\phi_{1\text{-sól.}} = \frac{4}{\beta} \tan^{-1}\left[\exp\left(\pm m\gamma(\Delta x - ut)\right)\right]$$

$$E \longrightarrow \frac{E}{\sqrt{1-u^2}}$$

# Outras soluções

- Transf. de Bäcklund

$$\partial_x(\phi+\psi) = 2\sigma\left(e^{\phi-\psi} - e^{-\phi+\psi}\right)$$

$$\partial_t(\phi-\psi) = \frac{2}{\sigma}\left(e^{\phi+\psi} - e^{-\phi-\psi}\right)$$

- Kink-kink

$$\boxed{\phi_{kk} = \frac{4}{\beta}\tan^{-1}\left[\frac{u\sinh(m\gamma x)}{\cosh(mut\gamma)}\right]}$$

- Kink-antikink

$$\boxed{\phi_{ka} = \frac{4}{\beta}\tan^{-1}\left[\frac{\sinh mut\gamma}{u\cosh mx\gamma}\right]}$$

- Breather

$$\boxed{\phi_B = \frac{4}{\beta}\tan^{-1}\left[\frac{\sin m\vartheta t\gamma'}{\vartheta\cosh mx\gamma'}\right]}, \quad \gamma' = \sqrt{1+\vartheta^2}$$

# Carga Topológica

$$Q \equiv \int dx\,(\partial_x\phi) = \phi(+\infty) - \phi(-\infty)$$

$$= \frac{4}{\beta}\left\{\pm\frac{\pi}{2} - \mp\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \pm\frac{4\pi}{\beta}$$

## 2. "Correções Quânticas"

Pertubações em torno do mínimo,

$$\begin{cases} \phi' \to \beta\phi \\ \partial_\mu \phi' \to \beta\, \partial_\mu \phi \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\beta^2}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi')(\partial_\mu \phi') - m^2(1-\cos\phi')\right\}$$

o momento canônico é dado por

$$\boxed{\pi' = \frac{\partial_t \phi'}{\beta^2}}$$

Vamos considerar a Hamiltoniana quântica para esse sistema,

$$\beta^2 H = \beta^2 \int dx \left\{\frac{1}{2}\beta^4 \pi'^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x \phi')^2 + U(\phi')}_{U(\phi')}\right\}$$

$$= \beta^2 \int dx \left\{\frac{1}{2}\beta^4 \pi'^2 + U(\phi')\right\}$$

$$\vdots$$

# 3. Outros tópicos

## 3. a. (d+1) - dimensões

skymions (vórtices e monopólos)

(3+1) - instantons (equivalente a WKB p/ QFT)
↳ euclidiano    vácuo degenerado + tunelamento

## 3.b. Dualidade SG/Thirring massivo

SG: $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta\phi)$$

TM: $$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)^2$$

✓ TM, proposto em 58 por W. Thirring,

✓ Coleman relacionou os dois modelos em 75, uso de métodos pertubativos,

✓ Mandelstam obteve mesmo resultados usando formalismo canônico, também em 75.

Relação entre as constantes,

$$\frac{\lambda}{4\pi m^2} = \frac{1}{1+\frac{g}{\pi}}$$

e entre as "partículas"

kink $\longleftrightarrow$ $\psi$ elementar

antikink $\longleftrightarrow$ $\bar{\psi}$ elementar

$\phi$ elementar $\longleftrightarrow$ $\bar{\psi}-\psi$ estados ligados

Carga topológica $\longleftrightarrow$ Número de férmions

# REFERÊNCIAS


• WEINBERG, Erick J. Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics (2012)

• LAURELL, Hugo. A summary on Solitons in Quantum field theory (2016).

• COLEMAN, Sidney. Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model (1975)

• MANDELSLAM, S. Soliton operators for Quantized sine-Gordon equation. (1975)