Quebra espontânea de simetria e teorema de Goldstone

Genilson Alves

Instituto de Física Teórica - Unesp

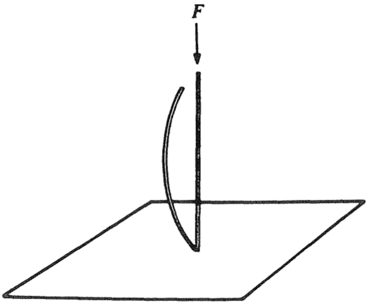
genilson.cardoso@unesp.br

Índice

Motivação

Na natureza existem sistemas que apresentam simetria, e esses podem sofrer uma **quebra espontânea de simetria**:

- Um exemplo simples é o caso de uma haste levemente flexível.



- No caso do ferromagnetismo, em altas temperaturas, materiais ferromagnéticos apresentam spins desorientados, obedecendo a uma simetria de rotação. Ao diminuir a temperatura, seus spins irão se alinhar-se em uma direção preferencial, quebrando a sua simetria inicial;
- Este mecanismo é muito importante na física de partículas pois possibilita entender como certas partículas ganham massa.

Quebra espontânea para uma simetria discreta

Vamos começar analisando a quebra espontânea de simetria para uma teoria clássica de campos. Seja a lagrangiana de uma teoria ϕ^4

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

mas substituindo m^2 por um parametro negativo, $-\mu^2$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{1}$$

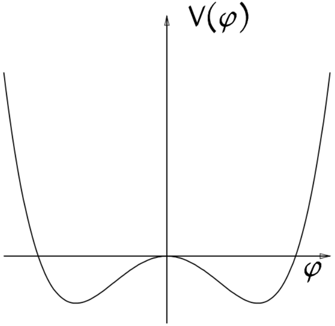
Esta lagrangiana na Eq (1) tem uma simetria discreta: Ela é invariante sobre a operação $\phi \to -\phi$. O mínimo da energia corresponde a uma configuração em que $\phi(x) = \phi_0 =$ constante, escolhendo ϕ_0 para minimizar o potencial

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{2}$$

Este potencial tem dois mínimos:

$$\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu. \tag{3}$$

A constante v é chamado de valor esperado do vácuo de ϕ.



As partículas são associadas com oscilações de ϕ em torno do valor mínimo, v. Neste caso é conveniente definir:

$$\phi(x) = v + \sigma(x), \tag{4}$$

as massas devem ser lidas da parte da lagrangiano quadrático em σ .Colocando (4) em (1) obtemos uma lagrangiana em termos de $\sigma(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{1}{4!}\sigma^4. \tag{5}$$

Esta lagrangiana descreve um campo escalar de massa $\sqrt{2}\mu$. A simetria $\phi \to -\phi$ não é mais aparente.

Quebra espontânea para uma simetria contínua

O Lagrangiano mais geral possível de um campo escalar complexo é:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{6}$$

onde o potencial $V(\phi)$ é definido como $V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$.

Se escrevermos o campo ϕ em termos das partes real e imaginária

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + i\pi) \tag{7}$$

obtemos para o lagrangiano na Eq (6)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V\left(\rho^2 + \pi^2\right) \tag{8}$$

onde

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\left(\rho^2 + \pi^2\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(\rho^2 + \pi^2\right)^2 \tag{9}$$

Esta lagrangiana da Eq (8) é invariante para o grupo de rotações O(2):

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} \tag{10}$$

Novamente, para analisarmos a quebra de simetria temos que ver onde ocorre o mínimo. As equações são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= 0 = \rho \left[\mu^2 + \lambda(\rho^2 + \pi^2)\right] \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} &= 0 = \pi \left[\mu^2 + \lambda(\rho^2 + \pi^2)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

No caso em que $\mu^2 < 0$, o mínimo ocorre na circunferência

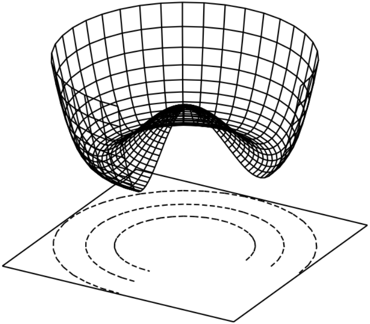
$$\sqrt{\rho^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \tag{12}$$

Para vermos o espectro vamos tomar os eixos no plano $\rho - \pi$ de tal forma que:

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad ; \quad \langle \pi \rangle = 0 \tag{13}$$

Então definimos

$$r = \rho - v \tag{14}$$



e escrevemos a lagrangiana da eq tal em termos de r e π:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu r \partial^\mu r + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \mu^2 r^2 - \lambda v r (r^2 + \pi^2) - \frac{1}{4}\lambda \left(r^2 + \pi^2\right)^2 \tag{15}$$

Por $\mathcal{L}$, temos que:

$$\begin{aligned} m_r &= \sqrt{-2\mu^2} \\ m_\pi &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Teorema de Goldstone

Seja uma teoria invariante sob a ação de um grupo de transformações G*, com* n *geradores. Se houver uma quebra espontânea de simetria, de tal forma que o vácuo seja invariante somente sob ação de* G' *com* m *geradores* $(G' \subset G)$*, então aparecerão partículas de spin zero sem massa em número igual ao dos geradores de* G *que não deixam o vácuo invariante, isto é, há* $n - m$ *bósons de Nambu-Goldstone.*

Demonstração

Vamos considerar uma teoria envolvendo muito campos ϕ^a:

$$\mathcal{L} = (\text{termos com derivadas}) - V(\phi). \tag{17}$$

Seja ϕ_0^a um campo constante que minimiza V

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V\Big|_{\phi^a = \phi_0^a} = 0.$$

Expandindo V em torno do mínimo

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a (\phi - \phi_0)^b \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} + \cdots$$

Onde,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0} = m_{ab}^2, \tag{18}$$

é uma matriz simétrica cujo os autovalores dão as massas dos campos.

uma transformação de simetria contínua geral tem a forma

$$\phi^a \to \phi^a + \alpha\Delta^a(\phi) \tag{19}$$

onde α é um parâmetro infinitesimal e Δ^a é alguma função de todos os ϕ's. Olhando para os campos constantes, o potencial deve ser invariante por (19) por si só

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha\Delta^a(\phi)) \qquad \text{or} \qquad \Delta^a(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi^a}V(\phi) = 0$$

Diferenciando a equação anterior com respeito a ϕ^b e calculando o mesmo no valor $\phi = \phi_0$ que minimiza V:

$$0 = \left(\frac{\partial \Delta^a}{\partial \phi^b}\right))_{\phi_0} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V\right)_{\phi_0} . \tag{20}$$

Se a transformação deixa ϕ_0 invariante, então $\Delta^a(\phi_0) = 0$. Uma quebra espontânea de simetria é precisamente aquela para a qual $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$. O que nos diz que m^2_{ab} tem um autovalor nulo

Conclusão

- Se o sistema funciona apenas com esse pontencial mínimo a sua simetria será espontaneamente quebrada;
- É evidente que campos quadráticos aparecem acompanhados de massa;
- Este procedimento foi feito com as lagrangianas dos campos escalares real e complexo, e notou-se o mesmo efeito em ambas;
- O campo escolhido para se aplicar o estado de vácuo adquiriu massa enquanto o outro não, este é o bóson de Goldstone;
- O teorema de Goldstone então é uma consequência da quebra espontânea de simetria e é relacionado ao surgimento de massa em apenas um dos campos envolvidos, sendo o bóson aquele que não adquiriu massa.

Referências

DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. (S.1.): World Scientific, 2020.

PASCHOS, E. A. *Electroweak theory*. (S.l.): Cambridge University Press, 2007.

RYDER, L. H. *Quantum field theory*. (S.l.): Cambridge university press, 1996.

Peskin, Michael E., and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory* (Boulder, CO. (1995).

OBRIGADO!