# Quantização ÑA e os Fantasmas do Bem

## Abordagem por analogias

Julia Carvalho Leite

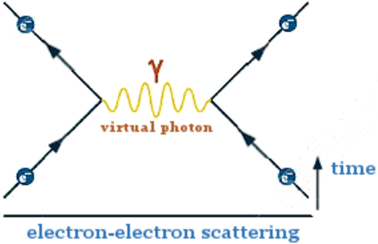
# Tópicos

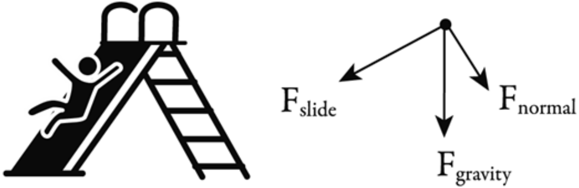
- Contextualização
- Gauge e Grupos de Lie
- Método de Faddeev-Popov
  - Motivação: Caso Não-Abeliano
  - Generalização
  - Diferenças na Fixação
- Fantasmas de Faddeev-Popov

# Contextualização

Finalmente, começamos a entender que a **Teoria Quântica de Campos (TQC) nos proporciona ferramentas poderosas**. Conseguimos **definir regras para QED** que possibilitam **descrever os fótons, elétrons e suas interações.** Dessas regras, definimos os **Diagramas de Feynman**:

- Representação pictórica;
- Analogia com Diagrama de força;
- Relação com a "Realidade"*.




Inaccessible physical system

$\downarrow$

Feynman diagram $\leftrightarrow$ mathematics

# Contextualização

**Para descrever sistemas físicos "inacessíveis" foi fundamental a associação das simetria, ou a invariância dos "observáveis", ao conceito dos campos.** Além de Lorentz, pelo Eletromagnetismo vimos que a **simetria de Gauge** é imprescindível para a descrição comum desse campo. Pela mesma ideia, poderíamos descrever outros sistemas físicos "inacessíveis" se baseando em **Teorias de Gauge**:

- Campo vetorial presente $A_\mu$;
- Generalização da Eletrodinâmica Quântica (QED) para outro campo fundamental.

**Resumindo:**

*Teoria de campos em que a Lagrangiana, ou seja,* **a dinâmica do sistema não muda sob transformações locais de Grupos de Lie.** *Dessa forma, poderíamos* **descrever outras interações subatômicas em termos de partículas ainda não detectadas.**

# Gauge e Grupos de Lie

## Qual a ligação de uma transformação de Gauge com os Grupos de Lie?

- "In a traditional gauge theory, the matter fields $\phi_a$ and the gauge fields $A^c_\mu$ are fundamental objects of the theory."
- Na QED: "matter" são elétrons e pósitrons $\rightarrow$ Onda de Dirac.
- Transf. de Gauge seria a Tranf. de Coord.;
- Fixar o Gauge seria a condição de $A^c_\mu$ que restringe a tranf. do campo de matéria, ou seja, é fixar a base de vetores de gauge que define o vetor matéria;
- "The disks represent the gauge invariant"

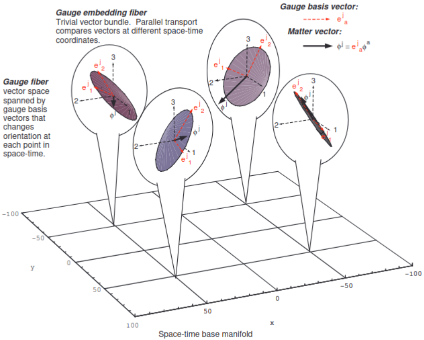



**Figure 1:** An $\mathbf{R}^2$-vector bundle embedded in a trivial $\mathbf{R}^3$-vector bundle. The choice of gauge determines the dotted-red basis vectors of the gauge fiber. The thick black vectors of varying length represent a real scalar matter field, which can be interpreted as a wavefunction.

[1] "Riemannian gauge theory and charge quantization", Serna & Cahill, 2003

## Qual a ligação de uma transformação de Gauge com os Grupos de Lie?

$\Rightarrow$ **Transformação dos Campos de Matéria e de Gauge vão ser determinada por uma relação dada pelos Grupos de Lie**, de tal forma que **modificará a base de vetores de Gauge determinando relações (ex.: comutação) entre as componentes da base.**

> **Atenção:** Note que utilizamos uma construção de Teoria de Gauge no espaço de Riemannian, o que não define o campo do fóton. **Precisaríamos quantizar o campo EM para obter o campo dos Bósons de Gauge do EM em gauge fixo.**

Antes, notemos resumidamente **o que é um Grupo:**

**Grupo é um conj. de elementos e uma operação** que combina quaisquer 2 elementos do conj., produzindo outro elemento pertencente ao conj., de tal forma que a oper. é **associativa, o elemento identidade existe e todo elemento tem seu inverso.**

Uma característica importante de qualquer Grupo é

"Se $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ (comuta), o grupo é chamado **Abeliano** do contrário, **não-Abeliano**."

## Grupos de Lie

São definidos por um **conjunto contínuo $\theta_i$ que parametrizam os elementos do grupo e pelas derivadas do elementos do grupo em relação a todos os parâmetros**, onde $T_i$ **são os geradores** do grupo:

$$T_i = -\, i \frac{\partial g}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta_i = 0}$$

## Grupos de Lie (GL)

Suas **representações** podem ser escritas como,

$$R_{\text{Lie}}[g(\theta)] = \exp\left(i\theta_i T_i\right) \cdot \mathbb{1} \simeq 1 + i\theta_i T_i$$

**Se $T_i$ é Hermitiano, então $R^\dagger_{\text{Lie}} R_{\text{Lie}} = \mathbb{1}$.** A **álgebra do Grupo de Lie** é definida pela relação de comutação:

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c,$$

com $f^{abc}$ sendo a **constante de estrutura**. Logo, um GL é **Abeliano se $f^{abc} = 0$ e não-Abeliano, caso o contrário.**

**Exemplos de Grupos de Lie:** Grupos Ortogonais SO(N) e Grupos Unitários SU(N).

**Em sistemas quânticos**, procuramos por operadores unitários e representações unitárias do grupo, portanto $T_i$ **precisa ser Hermitiano.** Assim, trataremos

## Grupos Unitários SU(N)

São **matrizes** $N \times N$ **com determinante** $+1$ **(Special)**: $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ e $\det U = +1$.

– Esse grupo tem um **papel especial em TQC e Física de Partículas** $\Rightarrow$ **Transf. Unitárias preservam as probabilidade para as transições de diferentes estados**

$$\langle A \mid B \rangle = \left\langle A \middle| U^\dagger U \middle| B \right\rangle = \langle A \mid B \rangle$$

**Grupo** $\mathrm{U}(1)$: É representado por uma fase complexa $U = \exp(-i\theta) \Rightarrow \mathcal{L}_{EM}$.

**Grupo** $\mathrm{SU}(2)$: $U = \exp(-i\tau_i\theta_i)$ e $[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k$, com $\tau_i \equiv \sigma_i/2$.

# Método de Faddeev-Popov: Motivação

**Voltando a tentativa de descrever sistemas físicos "inacessíveis"** utilizando a mesma lógica da QED, não havia nada a princípio que impediria a **aplicação da $\mathcal{L}_{EM}$ para outras transformações SU(N). A chamada Teoria de Yang-Mill foi proposta em 1954 e defini o caso Não-Abeliano da $\mathcal{L}_{EM}$) de puro gauge**, ideia que é base do SM. Notemos que $\mathcal{L}_{YM}$ é invariante sob a tranf. de gauge:

$$\psi \to \psi' = \Omega\psi \quad \leftarrow \quad \Omega = \exp\left[-iT^a\alpha^a(x)\right]$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igT^aA^a_\mu \quad \text{(tal que } D_\mu\psi \to \Omega\left(D_\mu\psi\right)\text{)}$$

Com a transf. do campo de gauge (fóton e gerador) sendo:

$$T^aA^a_\mu \to \Omega\left(T^aA^a_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)\Omega^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{a\prime}_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f_{abc}\alpha^bA^c_\mu$$

# Método de Faddeev-Popov: Motivação

**Voltando a tentativa de descrever sistemas físicos ”inacessíveis”** utilizando a mesma lógica da QED, não havia nada a princípio que impediria a **aplicação da $\mathcal{L}_{EM}$ para outras transformações SU(N). A chamada Teoria de Yang-Mill foi proposta em 1954 e defini o caso Não-Abeliano da $\mathcal{L}_{EM}$) de puro gauge**, ideia que é base do SM. Notemos que $\mathcal{L}_{YM}$ é invariante sob a tranf. de gauge:

Além disso, o Tensor Força generalizado será:

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

que se transf. por $F^{a\prime}_{\mu\nu} \to F^a_{\mu\nu} + f_{abc}\alpha^b F^c_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

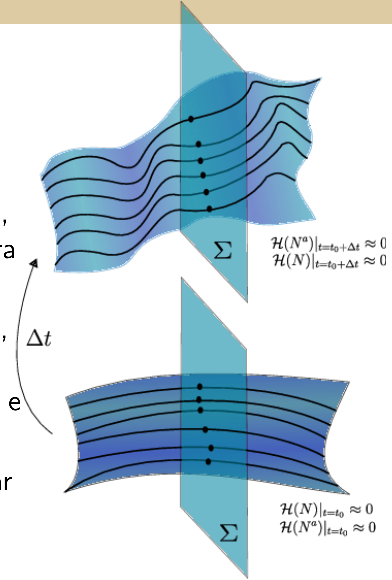
# Método de Faddeev-Popov: Motivação

Apesar da invariância de gauge, **a fixação do gauge não era bem definida para integrais de caminho**, fazendo com que o processo de quantização dependesse da condição de fixação de gauge escolhida.

– **Feynmann tentou resolver o problema perturbativamente**, concluindo que campos extras "ghostlike" seriam necessários para manter a teoria consistente (confiábilidade e cópias de Gribov).

– **Overcounting:** Ao fixarmos o gauge $\Sigma$, impondo bom vínculo, não definimos unicamente $A_\mu$, mas diminuem as possibilidades para que haja apenas um ponto de intersecção entre este espaço e Or(A) (para cada configuração inequivalente $\mathcal{H}(\mathcal{N})$).

"Gauge fixing by the intersection with the surface $\Sigma$ as the scalar and vector constraint evolve. The gauge choice changes as the surface (and the orbits) deforms."



**O problema foi formalmente resolvido por Faddeev e Popov**, defnindo um método geral de gauge-fixing via $G(A) = 0$ para integrais de caminho, integrando somente sobre configurações fisicamente distintas $\bar{A}_\mu$, de tal modo que $\mathcal{D}A_\mu = \mathcal{D}\bar{A}_\mu \mathcal{D}\chi$. O método propôs que qualquer vínculo para a fixação do gauge poderia ser imposto inserindo a seguinte idêntidade na integral:

$$\int \mathcal{D}\chi \, \delta(\underbrace{G\left(A_\mu^{M\chi}\right)}_{\text{vínculo}}) \det \left[ \frac{\delta G\left(A_\mu^{M\chi}\right)}{\delta\chi} \right] = 1 \Rightarrow \text{t. de perturbação}$$

Podemos definir: $\dfrac{\delta G\left(A_\mu^{M\chi}\right)}{\partial\chi} = \Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right]$, de forma que o vínculo será dado por $(A_\mu^M = A_\mu^a T^a)$

$$G\left(A_\mu^a\right) = g^a(A_\mu^a) - \omega^a(x)$$

# Método de Faddeev-Popov: Generalização

De forma geral, note que $A_\mu^{M\chi} \equiv \left(A_\mu^\chi\right)^a T^a = e^{i\chi^a t^a}\left[A_\mu^b t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\right] e^{-i\chi^c t^c}$, o que é coerente com a inv. de gauge. Sendo assim, teremos:

$$
\begin{aligned}
Z[0] &= \int \mathcal{D}A_\mu^M \; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{YM}} \int \mathcal{D}\chi\,\delta\left(G\left(A_\mu^{M\chi}\right)\right)\det\left[\Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right]\right] = \\
&= \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A_\mu^M \; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{YM}^\chi}\;\delta\left(G\left(A_\mu^{M\chi}\right)\right)\det\left[\Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right]\right] = \\
&= \underbrace{\int \mathcal{D}\chi}_{\text{nada depende de } \chi} \int \mathcal{D}A_\mu^M \; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{YM}}\;\delta\left(G\left(A_\mu^{M}\right)\right)\det\left[\Delta_G\left[A_\mu^{M}\right]\right]
\end{aligned}
$$

com $\mathcal{L}_{YM}\left(A_\mu^a\right) = \mathcal{L}_{YM}\left(A_\mu^{a\chi}\right) \equiv \mathcal{L}_{YM}^\chi$ também inv. de gauge.

# Método de Faddeev-Popov: Diferença na Fixação

## Abeliano

Transf. U(1): $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \lambda(x)$

Fixação: $\partial^\mu A_\mu^\chi = \partial^\mu A_\mu = c(x)$

$$\Rightarrow A_\mu^\chi(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$

Ou seja,

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) \Rightarrow$$

$$\mathsf{G}(A_\mu^\chi) = \partial^\mu A_\mu + \partial^2 \chi - \omega$$

Resultando em $\Delta_G\left[A_\mu^\chi\right] = \frac{\delta G}{\delta \chi} = \frac{\delta}{\delta \chi}\left(\partial^2 \chi\right)$

## Não-Abeliano

Transf. SU(N):

$$A_\mu^a \to A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda^a(x) - f^{abc}\lambda^b(x) A_\mu^c$$

Vínculo: $G\left(A_\mu^a\right) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)$

$\Rightarrow G\left(A_\mu^{a\,\chi}\right) =$

$$\partial^\mu\left(A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \chi^a + f^{abc} A_\mu^b \chi^c\right) - \omega^a(x)$$

Resultando em $\Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right] = \frac{\delta G}{\delta \chi^d} =$

$$\frac{\delta}{\delta \chi^d}\left(\frac{1}{g}\partial^\mu \partial_\mu \chi^a + \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b \chi^c\right) =$$

# Método de Faddeev-Popov: Diferença na Fixação

## Abeliano

Interessante notar, que se $G(A)$ não depende de $\chi$, caimos na condição que vimos para o caso Abeliano:

$$\det\left[\frac{\delta G\left(A_\mu^{M\chi}\right)}{\partial\chi}\right] = \det\left[\frac{\delta G\left(A_\mu^{M}\right)}{\delta\chi}\right] \equiv$$

$$\equiv \Delta_G\left[A_\mu^M\right] = \Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right]$$

Ou seja, diretamente temos

$$\Rightarrow \Delta_G^{-1}\left[A_\mu^M\right] = \int \mathcal{D}\chi\, \delta\left(G\left(A_\mu^{M\chi}\right)\right)$$

## Não-Abeliano

$= \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ad}$ , onde $D_\mu^{ad}$ terá o formato:

$$\left(A_\mu^\chi\right)^a = A_\mu^a + \frac{1}{\delta}\partial_\mu\chi^a + f^{abc}A_\mu^{bc}\chi^c =$$

$$= \mathsf{A}_\mu^a + \frac{1}{g}\left(\delta^{ac}\partial_\mu + \underbrace{g f^{abc}A_\mu^a}_{\text{dependência em } A}\right)\chi^c \equiv$$

$$\equiv A_\mu^a + \frac{1}{g}D_\mu^{ac}\chi^c$$

Ou seja, o problema aqui é:

$$\Rightarrow \Delta_G\left[A_\mu^{M\chi}\right] = \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ad}(A_\mu^a)$$

# Método de Faddeev-Popov: Diferença na Fixação

Focando no caso **Não-Abeliano**, existe uma saída curiosa para esse impasse: introduzir uma integral funcional de funções de **números de Grassmann** (novamente **precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem**):

$$\det\left(\partial^\mu D_\mu^{ad}\right) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}^a \ \exp\left[i\int d^4x\bar{c}\left(-\partial^\mu D_\mu^{ad}\right)c^d\right]$$

onde $\det\left[\Delta_{\mathrm{G}}\left[A_\mu^a\right]\right] = \det\left|\frac{\delta G}{\delta\chi^d}\right|_{G=0} \equiv \det M$, visto que M é uma matriz quadrada de dimensão $N^2-1$ (a,d são índices que numeram os geradores do grupo em $SU(N)$). Assim,

$$\det M = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \ \exp\left[i\int d^4x\bar{c}Mc\right]$$

Podemos ver que existe uma nova Lagrangiana, definida por uma "dinâmica fermiônica".

# Método de Faddeev-Popov: Diferença na Fixação

Substituindo, podemos fixar o gauge:

$$Z[0] = \text{ const. } \times \int \mathcal{D}A_\mu^M \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{YM} - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ad} c^a \right] \right\} \delta\left( G(A_\mu^M) \right) = \text{ const.}$$

$$\times \int \mathcal{D}A_\mu^M \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{YM} - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ad} c^a \right] \right\} \delta\left( \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x) \right) = \text{const.}$$

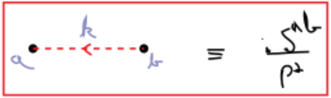
$$\times \int \mathcal{D}A_\mu^M \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{YM} - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ad} c^a \right] \right\} N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{\int d^4x i \left( -\frac{1}{2\xi} \left( \partial_\mu A_\mu^a \right)^2 + \omega^2/2\xi \right)} =$$

$$= \text{ const. } \times \int \mathcal{D}A_\mu^M \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{D} \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{YM} - \mathcal{L}_{FG} - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ad} c^a \right] \right\}$$

Onde definimos um peso guassiano, onde para $\omega^2/2\xi$ será unitário. O mesmo é feito para o caso Abeliano.

Sendo assim, ficamos com a Lagrangeana que define os Fantamas de Faddeev-Popov:

$$\mathcal{L}_{\text{FPG}} = \underbrace{\partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a}_{\text{Termo cinético}} \underbrace{+ g f^{abc} \bar{c}^a \left( \partial^\mu A^b_\mu c^c \right)}_{\text{Interação Ghost-Gauge}}$$



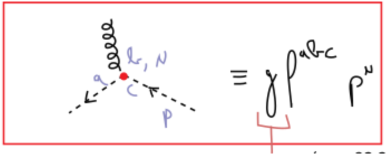
( eq. 83.2 )

(Espaço dos momentos, Mink)

Para o termo cinético:

$$\left\langle c^a(x), \bar{c}^b(y) \right\rangle = \int \frac{\partial^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

Para o termo de interação: $g f^{abc} \left( \partial_\mu \bar{c} \right) A^b_\mu c^c$

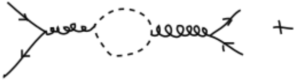



Para Abeliana, $f^{abc} = 0 \rightarrow$ As part. fantasmas não interagem com o campo de gauge.

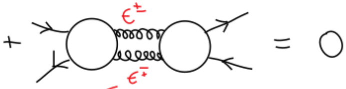
# Fantasmas de Faddeev-Popov

Sendo assim, ficamos com a Lagrangeana que define os Fantamas de Faddeev-Popov:

$$\mathcal{L}_{\text{FPG}} = \underbrace{\partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a}_{\text{Termo cinético}} + \underbrace{g f^{abc} \bar{c}^a \left( \partial^\mu A^b_\mu c^c \right)}_{\text{Interação Ghost-Gauge}}$$



$$c \begin{cases} \text{Adjunta de } SU(N) \\ \text{Anti-comutam (estatística de férmions)} \\ \text{Escalares de Lorentz (spin 0)} \end{cases}$$



polarizações longitudinais dos bósons de Gauge

$\Rightarrow$ Viola a relação spin-estatística: considerados "não-físicos".

$\Rightarrow$ Fantasmas do Bem: graus de liberdade "negativos"; cancela as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.