

Teoria Quântica de Campos

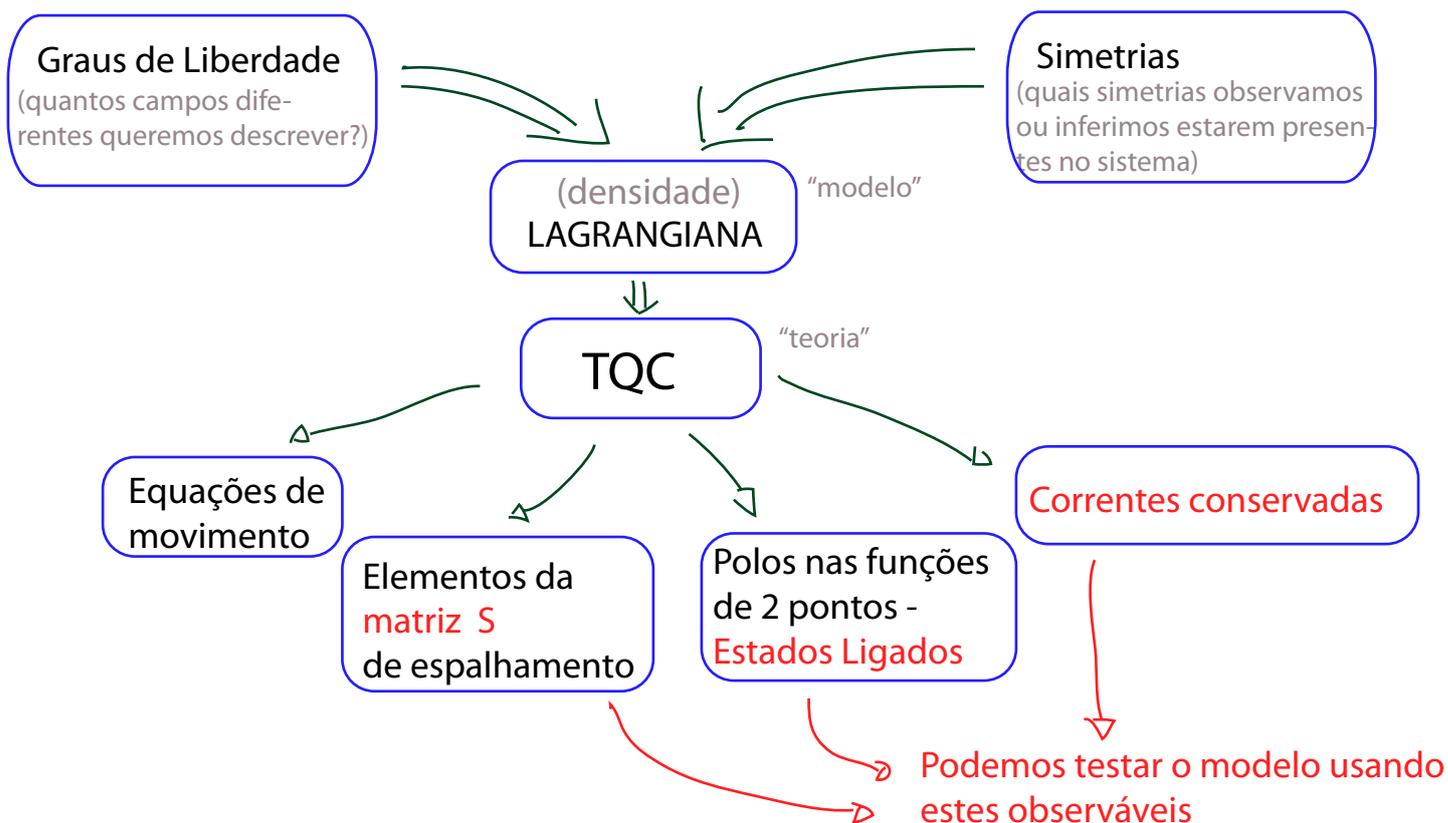
Lagrangianas e Observáveis

Do que se trata: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido da relatividade restrita)

Objeto dinâmico básico da teoria: **CAMPO!**

Estes campos são Quantizados: excitações do campo em torno do **vácuo** são **PARTÍCULAS** (estritamente verdade no regime fracamente acoplado!)

Contruindo um Modelo:



Sobre os graus de liberdade e simetrias

A primeira simetria que exigimos é a própria invariância por translações e rotações no espaço tempo, que juntas formam o **grupo de Poincaré**. Cada campo da teoria é colocado em uma representação deste grupo e isto fixa as propriedades da partícula associada, em particular o **SPIN** e, por consequência, sua estatística:

Coordenadas antes e depois da transformação

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Transformação de Lorentz

$$\phi'_i(x') = R_i^j \phi_j(x)$$

a coordenada foi transformada, mas a própria forma funcional do campo pode ter mudado

note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes (ϕ_1 e ϕ_2) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Escalares

$$\mathcal{R} = \hat{1}$$

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

⇒ Bosons de spin 0

Vetores

$$\mathcal{R} = \Lambda \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$A'_\mu(x') = \Lambda_{\mu\nu} A_\nu(x)$$

⇒ Bosons de spin 1

Spinores

$$\mathcal{R} = M_D \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$\Psi'_\alpha(x') = M_{D\alpha\beta}(\Lambda) \Psi_\beta(x)$$

⇒ Férmions de spin 1/2

$$M_D \equiv e^{-\frac{1}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Matrizes de Dirac

Mas não é só isso, outras simetrias podem estar presentes no sistema, sejam elas **globais** ou **locais** (ou **de Gauge**), **contínuas** ou **discretas**, e temos que decidir em que representações estão os campos. Em particular, simetrias de Gauge acabam levando à interações entre campos diferentes. Alguns exemplos:

(1) Na escala típica das interações nucleares, a força eletromagnética é desprezível e o próton e o nêutron são praticamente idênticos, podemos definir o **NUCLEON**:

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação fundamental** de um **SU(2) GLOBAL**, chamado de **ISOSPIN** (além de ser também um férmion, na representação spinorial do grupo de Lorentz).

(2) O mesmo pode ser feito com os três pions (π^0 , π^+ e π^-):

$$\pi = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^+ \\ \pi^0 \\ \tilde{\pi}^- \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação adjunta** deste mesmo **SU(2) GLOBAL** mas é um escalar de Lorentz com sinal negativo sobre uma transformação discreta, a transformação de paridade.

A Lagrangiana mais geral que envolve estes dois campos dá conta da **FORÇA NUCLEAR FORTE**.

(3) O **elétron** tem spin 1/2, portanto queremos um campo na representação spinorial de Lorentz, e uma carga conservada, o que implica em pelo menos uma simetria global U(1), sobre a qual ele se transforma na rep. fundamental. Se tornamos esta **simetria U(1) local**, é necessário também introduzir um campo vetorial sem massa (chamado de Boson de Gauge), na rep. adjunta, o **foton**:

$$\Psi_e \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Spinor} \\ U(1): \Psi_e \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \Psi_e \end{array} \right) \quad A_\mu \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Vetor} \\ A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \end{array} \right)$$

Com estes dois campos e a simetria U(1) conseguimos construir a QED (e dela, obter as equações de Maxwell):

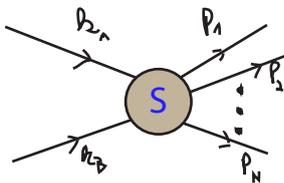
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi}_e (\not{D} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ &= \bar{\Psi}_e (\not{\partial} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - ie \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \end{aligned}$$

(outra forma de chegar na mesma Lagrangiana é partir do fato de que temos ftons - um boson vetorial sem massa - e elétrons na natureza, e buscar qual Lagrangiana consistente - em um sentido que veremos adiante - conseguimos escrever para isso)

(4) Sabemos que os **quarks** tem um número quântico interno que pode assumir três valores diferentes e é chamado de **cor**. Observa-se também que independentemente do estado de cor, eles interagem sempre com o mesmo acoplamento com os **gluons**. O modelo que descreve isto é a **QCD (cromodinâmica quântica)** e nela os quarks estão na rep. fundamental de **SU(3)** e os gluons são os bósons de Gauge exigidos (e portanto estão na adjunta de SU(3)).

Observáveis (espalhamento)

Um vez que temos a Lagrangiana a TQC nos dá ferramentas para obter elementos da **matriz S**, que conecta estados assintóticos em um espalhamento:



$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \quad (\text{eq. 3.1})$$

O que nos permite chegar na seção de choque de espalhamento,

$$S \equiv 1 + i T$$

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_k\})$$

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k)$$

(eq. 3.2)

que estabelece a distribuição de probabilidades do espalhamento e pode ser testada em laboratório.

Tipicamente o cálculo destes objetos exige uma **expansão perturbativa**, que pode ser representada em termos de **Diagramas de Feynman** e operacinalizada em termos de **Regras de Feynman**.

O que vem a seguir?

A pergunta que deveria estar incomodando o aluno atento é: esta Lagrangiana mais geral (construída com os graus de liberdade escolhidos e permitida pelas simetrias impostas) tem um número finito de termos? Usando a QED como exemplo, podemos colocar esta pergunta na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_e \not{D} \Psi_e - m \bar{\Psi}_e \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \underbrace{C_1 \bar{\Psi}_e \Psi_e \bar{\Psi}_e \Psi_e + C_2 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 + C_3 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^3 + \dots}_{\text{CADÊ!}}$$

A resposta para esta pergunta está intimamente ligada a outro problema que o aluno já pode ter encontrado com grau maior ou menor de profundidade: ao analisar o espectro e espalhamentos produzidos pela TQC das Lagrangianas estudadas em TQC I, identificamos que para cada campo na Lagrangiana correspondia uma partícula (além da sua antipartícula e podendo se manifestar em diferentes estados correspondentes a números quânticos, tais como orientações de spin ou simetrias internas - e.g.: a partícula "quark u" pode estar no estado "vermelho, azul ou verde") e as constantes da Lagrangiana tinham interpretação física, tais como a massa das partícula e as constantes de acoplamento da teoria. É importantíssimo perceber no entanto que todas estas conexões foram estabelecidas **em primeira ordem de teoria de perturbação!** Também conhecida como **LO** (leading order) ou **nível árvore**. Não há qualquer garantia de que estas identificações se mantenham quando formos para a próxima ordem de perturbação, e menos ainda se decidirmos tratar teorias que não sejam **perturbativas** (**fracamente acopladas**, **pouco correlacionadas** ou o seu termo favorito para "**teorias simples**"). Em resumo, dada a Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_e (\not{D} - ieA) \Psi_e - m \bar{\Psi}_e \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Veremos elétrons e pósitrons

Veremos fótons

esta é a massa do elétron (e a do fóton é 0)

este é o acoplamento entre eles

Todas as setas vermelhas só são válidas se o acoplamento for pequeno e, ainda assim, em primeira ordem de perturbação!

É claro que nem tudo que aprendemos em TQC I está perdido. Veremos que as afirmações relacionadas aos graus de liberdade (existência de elétrons e fótons) se mantêm em teorias fracamente acopladas (que é o caso da QED) e a identificação da massa e acoplamento na Lagrangiana acima tem correções quando consideramos a próxima ordem de perturbação, mas sabemos lidar com isso.

Por outro lado, para **teorias fortemente acopladas** a coisa se complica: poderíamos escrever uma Lagrangiana bem parecida com esta acima, so que com quarks e gluons, e o espectro daquela teoria a baixas energias consiste em muitas dezenas de partículas que não são quarks nem gluons (são Hádrons, tal como o próton, o neutron e o pion) e elas interagem entre si com acoplamentos que não são o que aparece na Lagrangiana de quarks e gluons. Mantenha isso em mente!

Começaremos o curso de TQC II olhando de perto a relação entre as Lagrangianas e os observáveis da teoria. O objetivo é entender bem que informação esta codificada ali, qual liberdade temos para mudar as variáveis usadas e quais escolhas explicitam melhor novos efeitos físicos que aparecem além da primeira ordem de perturbação.

Correções Radiativas

Representação Espectral de Källén-Lehmann

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - sec 10)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria completa, sem nos apoiarmos em teoria de perturbação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto em uma teoria interagente? (na livre era só um propagador)

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de \hat{H} e \hat{P} : $|\lambda_p\rangle$

Lagrangiana completa

podem ter uma ou mais partículas

Notem que estamos assumindo que \hat{H} e \hat{P} comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos: $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{P} |\lambda_0\rangle = 0$

λ carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados

estado de momento zero

$$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de \hat{H} me diz que $|\lambda_p\rangle$ também é auto-estado de \hat{H}

$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

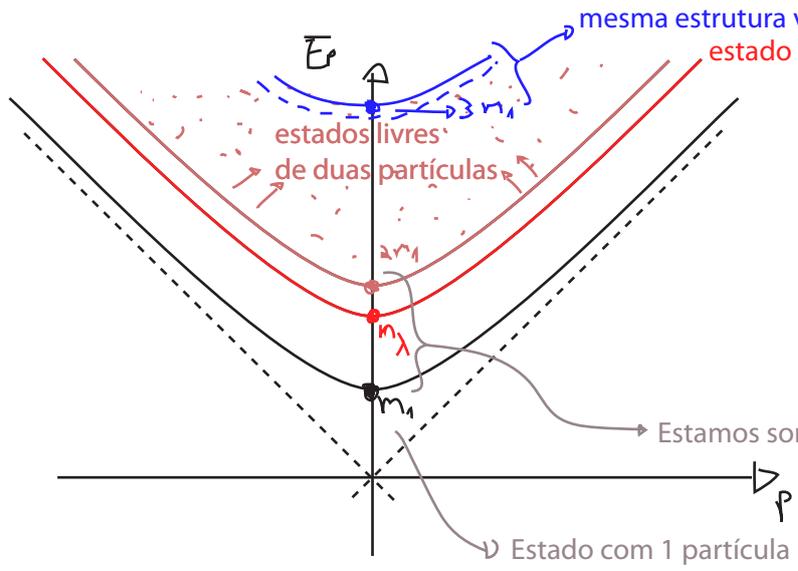
$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso

(o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de H pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$:



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \int_{\lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

↳ pode ser uma soma sobre λ discretos ou uma integral na parte em que m_λ pode variar continuamente (para estados não ligados)

↳ Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \int_{\lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega|e^{\hat{P}x} \phi(0) e^{-i\hat{P}x}|\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-iPx}$$

↳ translação

$P^0 = E_p$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-iPx} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-iPx}$$

↳ boost de \vec{p} para 0
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$P^0 = E_p$ $P^0 = E_p$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui, apareceriam fatores multiplicativos resultantes de como o campo se transforma sob transformações de Lorentz. Mas notem que qualquer que fosse o campo (ou operador composto de produto de campos), desde que eu conheça a transformação do objeto sobre boosts eu posso dar esse passo, e o fator que aparecer sai do elemento de matriz.

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \quad x_0 > y_0$$

$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

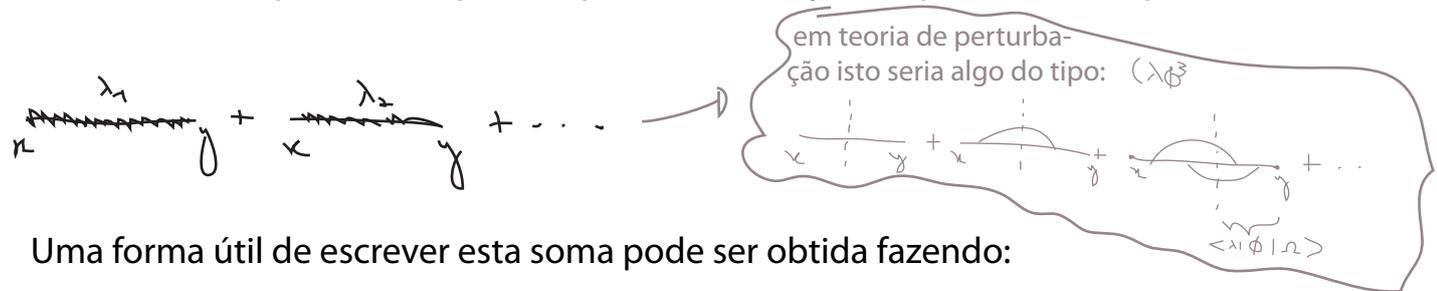
Note que até aqui não há conexão com parâmetros da Lagrangiana

Poderíamos fazer o mesmo para o caso $y_0 > x_0$ e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

$\rightarrow \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow \geq 0$

Note que, a menos de um fator multiplicativo, obtemos uma "soma" de propagadores de Feynman com a massa substituída por m_{λ} . Para cada estado λ contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$P(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} P(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

Vejamos como a função de dois pontos se comporta perto do estado intermediário de uma partícula. Teremos $m_\lambda = m$, onde m é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula:

estado de 1 partícula com momento zero

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 \underset{1 \text{ PART}}{\approx} (2\pi) \delta(M^2 - m^2) |\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2$$

soma dominada por $m_\lambda = m$
 Z

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2) \underset{1 \text{ PART}}{\approx} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

$Z \rightarrow$ Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquele parâmetro que aparece na Lagrangiana, que chamaremos de m_0

$m \rightarrow$ Massa física

$m_0 \rightarrow$ Massa nua (bare mass)

Se decidimos definir um novo campo (provisoriamente chamado de ϕ'): $\phi' \equiv \phi / \sqrt{Z}$

$$\therefore \langle \Omega | T \{ \phi'(x) \phi'(y) \} | \Omega \rangle \underset{1 \text{ PART}}{\approx} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

Este novo campo tem a propriedade de produzir uma função de dois pontos que tem polo na massa física m , **com residuo idêntico àquele que havia em m_0 na teoria livre!** Com uma mudança relativamente trivial do campo recuperamos a forma do propagador da teoria livre próximo ao polo (o polo não está na mesma posição, no entanto).

Em relação às contribuições de mais partículas, podemos definir:

$$\rho(M^2) \equiv 2\pi \delta(M^2 - m^2) Z + \sigma(M^2)$$

Z = 0 para teorias em que não há estado de 1 partícula produzido pelo campo na Lagrangiana (intratável perturbativamente)
contribuições de estados de 2 ou mais partículas.

Temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa m_λ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre m e $2m$. Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

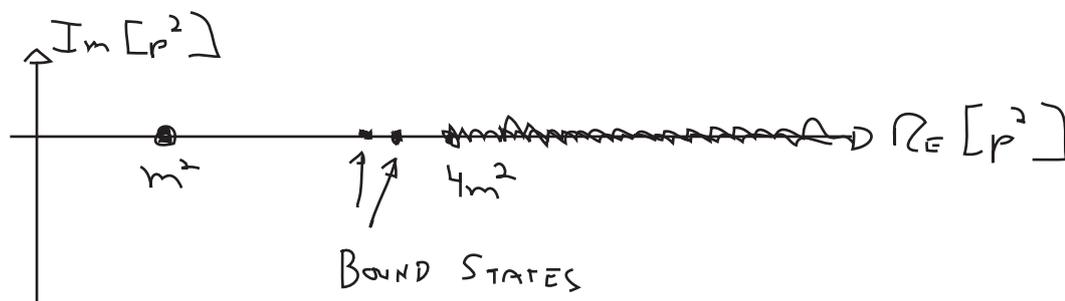


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} P(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} =$$

$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \tilde{\sigma}(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo ($\epsilon \rightarrow 0$):



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando “desligamos” a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} P(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

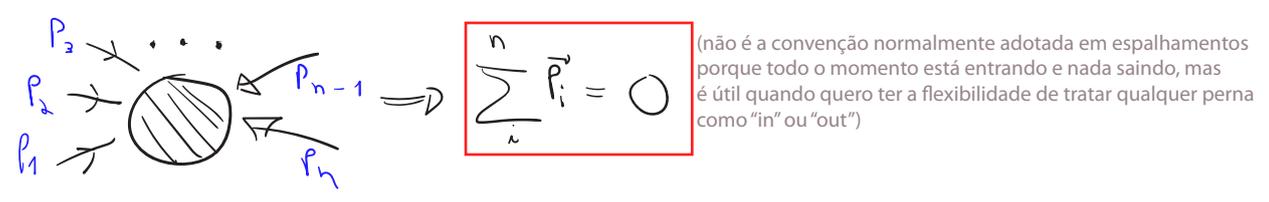
“Polologia”

(Weinberg QTF - Vol1 - sec 10.2)

Agora vamos aplicar um procedimento bastante análogo para estudar a estrutura analítica da função de n pontos:

$$G_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{+i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

Especificamente, estamos interessados nos polos produzidos por estados de uma partícula (sem nos preocuparmos se estas são estados ligados, ou partículas fundamentais). Considere a seguinte convenção para os momentos:

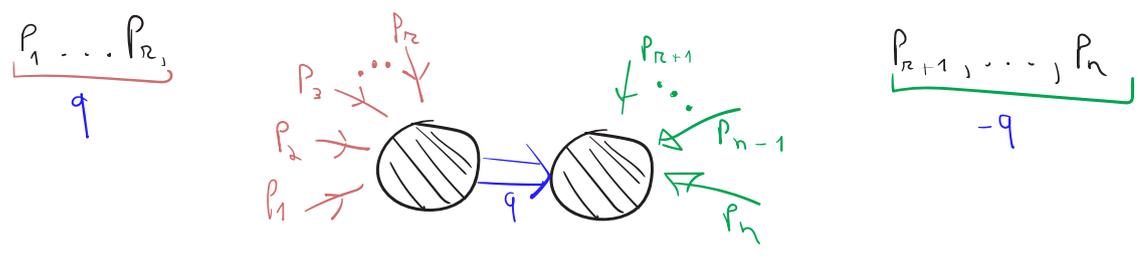


Gostaríamos de saber o que acontece quando um subconjunto destes momentos fica “on-shell”, ou seja, definindo:

$$q \equiv p_1 + \dots + p_r = -p_{r+1} - \dots - p_n \quad 1 \leq r \leq n-1$$

o que acontece quando $q^2 = m_\lambda^2$? (m_λ é a massa de algum estado físico da teoria)

Esquemáticamente falando, o momento q está fluindo entre dois “sub-diagramas” (lembre que não estamos falando de teoria de perturbação, mas na hora que especializarmos para um caso perturbativo, teremos diagramas deste tipo):



Há muitos ordenamentos temporais possíveis, mas estamos interessados apenas naqueles em que os tempos correspondentes às linhas no conjunto [1,r] são todos maiores dos que os do conjunto [r+1,n]:

$$G_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{+i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_r) \} T \{ \phi(x_{r+1}) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{x_i^0 > x_j^0 \quad \forall x_i \in \{x_1, \dots, x_r\} \ \& \ \forall x_j \in \{x_{r+1}, \dots, x_n\}} + \text{O.T.}$$

“Outros Termos”
(outros ordenamentos temporais)

Agora usamos a identidade da página 6:

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \int_{\lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

mas estamos apenas interessados nos termos de uma partícula (seja fundamental ou um estado ligado) o resto agrupamos em junto com os outros ordenamentos temporais em O.T.:

$$\hat{1} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p| + \text{O.T.}$$

(estados em que λ muda continuamente)

Então:

$$G_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{+i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}$$

(outros ordenamentos e outros estados!)

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\}|\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|T\{\phi(x_{n+1}) \dots \phi(x_n)\}|\Omega\rangle + \text{O.T.}$$

para calcular os dois brackets acima, usamos translações da mesma forma que fizemos na página 6:

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\} = e^{i\hat{P}x_1} T\{\phi(0)\phi(x_2-x_1)\dots\phi(x_n-x_1)\} e^{-i\hat{P}x_1}$$

$\langle\Omega|e^{i\hat{P}x} = \langle\Omega|$ $e^{-i\hat{P}x}|\lambda_p\rangle = e^{-ipx}|\lambda_p\rangle$

$y_i = x_i - x_1 \quad / \quad 2 \leq i \leq n$ $y_i = x_i - x_{n+1} \quad / \quad n+2 \leq i \leq n$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|\lambda_p\rangle = \langle\Omega|T\{\phi(0)\phi(y_2)\dots\phi(y_n)\}|\lambda_p\rangle e^{-ipx_1} \quad / \quad p^0 = E_p$$

Da mesma forma:

$$\langle\lambda_p|T\{\phi(x_{n+1})\dots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = \langle\lambda_p|T\{\phi(0)\phi(y_{n+2})\dots\phi(y_n)\}|\Omega\rangle e^{ipx_{n+1}} \quad / \quad p^0 = E_p$$

$y_i = x_i - x_{n+1} \quad / \quad n+2 \leq i \leq n$

Note que fizemos uma translação de x_1 em uma parte da expressão e de x_{n+1} na outra, faremos esta mudança também nas integrais:

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n \rightarrow \int d^4x_1 d^4x_{n+1} d^4y_2 \dots d^4y_n d^4y_{n+2} \dots d^4y_n$$

Nas exponenciais, ficamos com o seguinte:

$$e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} = e^{i \left[(p_1 + \dots + p_r) x_1 + (p_{r+1} + \dots + p_n) x_{r+1} + (p_2 y_2 + \dots + p_r y_{r+r+2} y_{r+2} \dots p_n y_n) \right]}$$

$$p_1 x_1 + p_2 \underbrace{x_2}_{y_2 + x_1} + \dots + p_r \underbrace{x_r}_{y_r + x_1} + p_{r+1} x_{r+1} + p_{r+2} \underbrace{x_{r+2}}_{y_{r+2} + x_{r+1}} + \dots + p_n \underbrace{x_n}_{y_n + x_{r+1}} =$$

$$= (p_1 + p_2 + \dots + p_r) x_1 + (p_2 y_2 + \dots + p_r y_r) + (p_{r+1} + \dots + p_n) x_{r+1} + (p_{r+2} y_{r+2} \dots p_n y_n)$$

Obtemos portanto:

$$G_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 d^4 x_{r+1} e^{i(p_1 + \dots + p_r) x_1} e^{i(p_{r+1} + \dots + p_n) x_{r+1}} \times$$

$$\times \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p x_1} \Big|_{p^0 = E_p} e^{i p x_{r+1}} \Big|_{p^0 = E_p} G_r^A(p_1, p_2, \dots, p_r) G_{n-r}^B(p_1, p_{r+2}, \dots, p_n) + \text{O.T.}$$

$$G_r^A(p_1, p_2, \dots, p_r) \equiv \int d^4 y_2 \dots d^4 y_n \langle \Omega | T \{ \phi(0) \phi(y_2) \dots \phi(y_n) \} | \lambda_p \rangle e^{i(p_2 y_2 + \dots + p_n y_n)}$$

$$G_{n-r}^B(p_1, p_{r+2}, \dots, p_n) \equiv \int d^4 y_{r+2} \dots d^4 y_n \langle \lambda_p | T \{ \phi(0) \phi(y_{r+2}) \dots \phi(y_n) \} | \Omega \rangle e^{i(p_{r+2} y_{r+2} + \dots + p_n y_n)}$$

Lembrando que:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{f(p)}{2E_p} e^{-i p(x_1 - x_{r+1})} \Big|_{p^0 = E_p} \stackrel{x_1 > x_{r+1}}{=} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i f(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x_1 - x_{r+1})}$$

Podemos colecionar todas as exponenciais em x_1 e x_{r+1} e integrar:

$$\int d^4 x_1 e^{-i p x_1} e^{i(p_1 + \dots + p_r) x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p - (p_1 + \dots + p_r))$$

$$\int d^4 x_{r+1} e^{i p x_{r+1}} e^{i(p_{r+1} + \dots + p_n) x_{r+1}} = (2\pi)^4 \delta^4(p + (p_{r+1} + \dots + p_n))$$

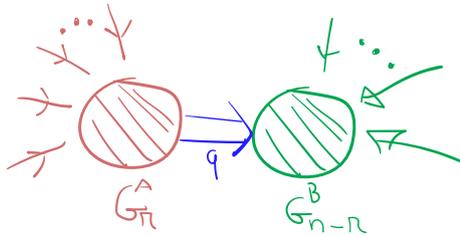
De forma que:

$$G_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_R^A(p_1, p_2, \dots, p_r) \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} G_{n-r}^B(p_1, p_{r+1}, \dots, p_n) \times \\ \times (2\pi)^8 \delta^4(p - (p_1 + \dots + p_r)) \delta^4(p + (p_{r+1} + \dots + p_n)) + O.T =$$

$p = p_1 + \dots + p_r = q$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \sum_\lambda G_R^A(q, p_2, \dots, p_r) \frac{i}{q^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} G_{n-r}^B(q, p_{r+1}, \dots, p_n) + O.T$$

Que reflete bem a estrutura que estávamos procurando:



e mostra que temos um polo em G_n toda vez que a soma ao quadrado de um subconjunto de momentos passa por uma das massas físicas da teoria, **desde que as funções G^A e G^B sejam diferentes de zero!** Esta condição é importante, tomando G^B como exemplo, é necessário que:

$$\langle \lambda | T \{ \phi(0) \phi(y_{n+2}) \dots \phi(y_n) \} | \Omega \rangle \neq 0$$

Deve haver, obrigatoriamente, uma combinação de operadores na teoria que crie o estado:

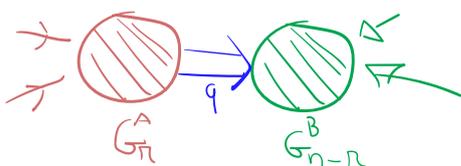
$$|B\rangle = \phi(0) \phi(y_{n+2}) \dots \phi(y_n) | \Omega \rangle$$

e este estado deve ter uma projeção diferente de zero com o estado de massa m_λ :

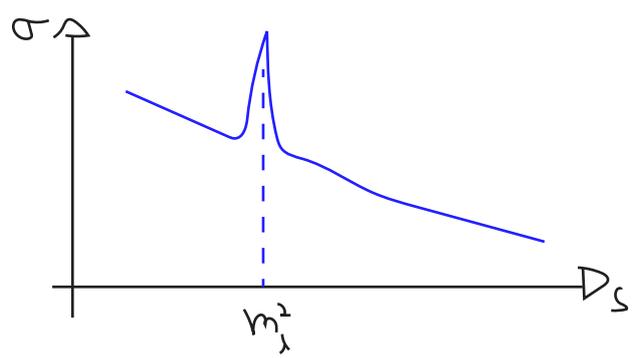
$$\langle \lambda | B \rangle \neq 0$$

o polo vai aparecer justamente na função de Green (e no subconjunto de momentos) que tiver esta combinação de operadores (a situação é análoga para G^A)

Imagine que estivéssemos falando de um espalhamento $2 \rightarrow 2$:



E que a teoria permitisse G^A e G^B não nulos para algum estado intermediário deste tipo. O polo se manifestaria como um aumento enorme na seção de choque:



É esse "pico" que usamos para descobrir uma partícula. O importante é notar que **a existência da partícula** necessita apenas que **exista uma combinação de campos para produzi-la**, e não que ela tenha o seu próprio campo na Lagrangiana (é claro que o caso mais simples é quando a combinação consiste em apenas um campo com os números quânticos certos para aquela partícula).

Ex.: a QCD produz todo o espectro de Hadrons (embora não seja trivial obtê-lo a partir de uma Lagrangiana com quarks e glons) e em particular podemos expressar o Píon em termos de uma corrente de quarks:

$$\langle \Omega | \bar{\psi}^a \gamma^\mu \gamma^5 \psi^b(x) | \pi^c(p) \rangle = -i p^\mu \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \delta^{ab} e^{-i p \cdot x}$$

índices de SU(2)
 constante de decaimento do Píon
 estado de 1 Píon de momento p
 "corrente" de quarks

$$\bar{\psi}^a \gamma^\mu \gamma^5 \psi^b(x) \equiv \bar{\Psi}_q \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\sigma^a}{2} \Psi_q$$

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3, Weinberg QFT - Vol1 - sec 10)

Note que até aqui só olhamos o que acontece quando em alguma parte interna do diagrama tínhamos um momento on-shell (isso é útil porque podemos aplicar tudo a subdiagramas que tem as pernas "externas" off-shell). Vamos ver o que acontece quando usamos estas ideias com momentos externos "on shell". Considere:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de x) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{i p \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \int_{T_+}^{\infty} d^4x + \int_{T_-}^{T_+} d^4x + \int_{-\infty}^{T_-} d^4x$$

I
 II
 III

$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$

Na região I o tempo x^0 é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+} d^4x \int d^3k e^{i p^0 x^0} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) \bar{T} \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$\sum_{\lambda} \frac{\int d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | \bar{T} \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pág 6} \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+} d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+i \vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x^0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times$$

$$\times \langle \lambda_k | \bar{T} \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+} d^4x \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i (E_p - p^0) x^0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times$$

← Para garantir convergência

$$\times \langle \lambda_p | \bar{T} \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

→ será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i (E_p - p^0) T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i \epsilon]}$$

Esta é uma função de p_0 com singularidades em todos os pontos $E_p(\lambda)$. Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo, que equivale a uma partícula de massa (física) m .

→ dominado por $\lambda = 1$, com $m_1 = m$

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m_1^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p (p^0 - E_p)$$

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow E_p}_{\substack{\text{estado de 1 partícula com momento } \vec{p} \\ \text{estado de 1 partícula com momento zero}}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow -E_p} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{p} \rangle$$

A região II não possui polos em $p_0 \rightarrow E_p$ ou $p_0 \rightarrow -E_p$ se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{p_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 15 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$: distribuição estreita centrada em \vec{p} (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote (de forma que ainda faz sentido olhar cada perna externa perto do polo de UMA PARTÍCULA). Retrazendo todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{i}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow E_p} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$\vec{p} \equiv (p_0, \vec{k})$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos \vec{k} , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de $\varphi(\vec{k})$. A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos $\varphi(\vec{k})$ até que vire uma delta e o corte volte a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de $n+2$ pontos da página 14, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in \text{I}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_1 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_1 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} |$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} d^4k_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\sim \int \prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(k_i) \frac{i\sqrt{z}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$p_1^0 \rightarrow E_{p_1}$
 $p_2^0 \rightarrow E_{p_2}$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{i\sqrt{z}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{out} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

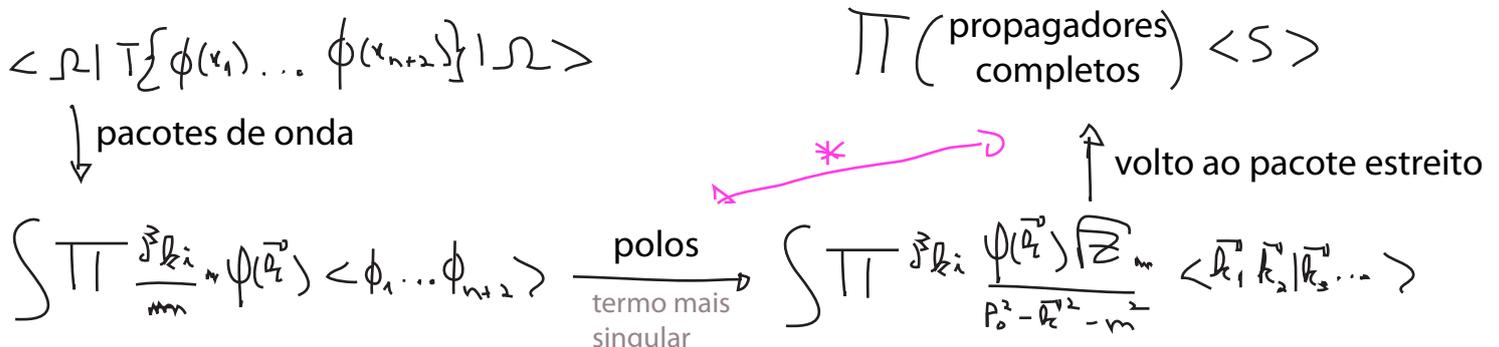
Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} d^4k_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left(\frac{i\sqrt{z}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{out} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 | (-\vec{p}_3) (-\vec{p}_4) \dots \rangle_{in}$$

contém em si elementos de matriz de S

Resumindo



* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^{-1}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^{-1}}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 19.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 19.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como $u^s(p)$ acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais do espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator \sqrt{Z} , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

Importante: note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana (m_0) de qualquer forma.

Note que se definíssemos (assim como na página 8): $\phi' \equiv \frac{\phi}{\sqrt{Z}}$

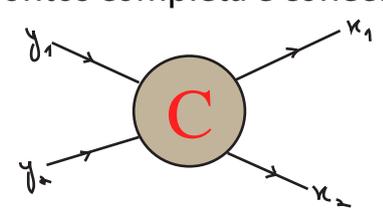
removeríamos todos os fatores \sqrt{Z} da fórmula LSZ, de forma que este novo campo também tem propagadores para as pernas externas idênticos ao de uma partícula livre (só que com o polo na massa física). Essa redefinição, no entanto, não significa que podemos simplesmente ignorar o Z, pois este terá outros efeitos sobre a constante de acoplamento da teoria (que veremos mais adiante).



Field and Mass renormalization

(Peskin 7.2; Weinberg QFT - Vol1 - sec 10.3)

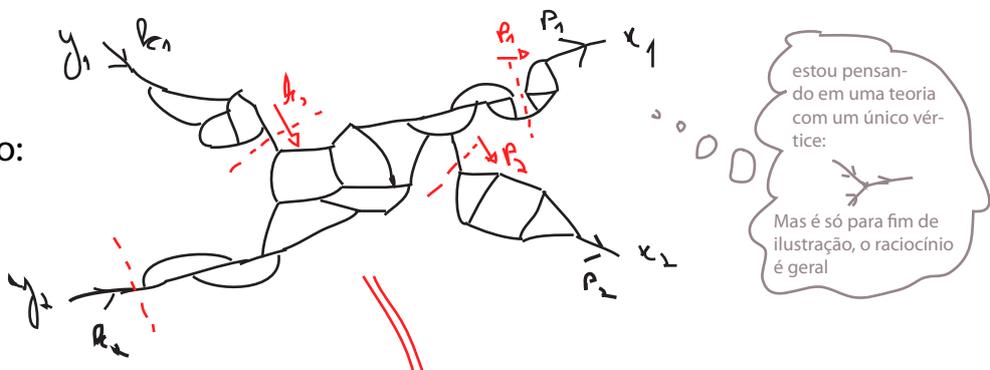
Vamos agora relacionar estes resultados com o que obtemos por meio de séries perturbativas. Considere, por simplicidade, a função de 4 pontos completa e conectada (uma vez que diagramas desconectados não contribuem para os elementos da matriz S):



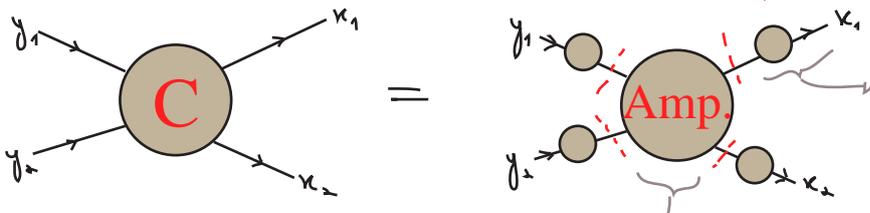
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left(\prod_{i=1}^2 \int d^4 k_i e^{i P_i \cdot x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j e^{-i k_j \cdot y_j} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



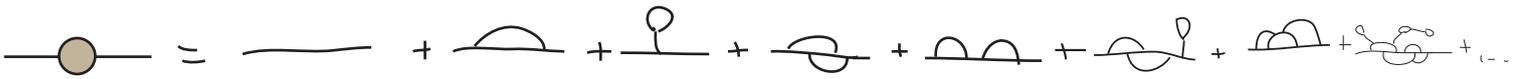
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



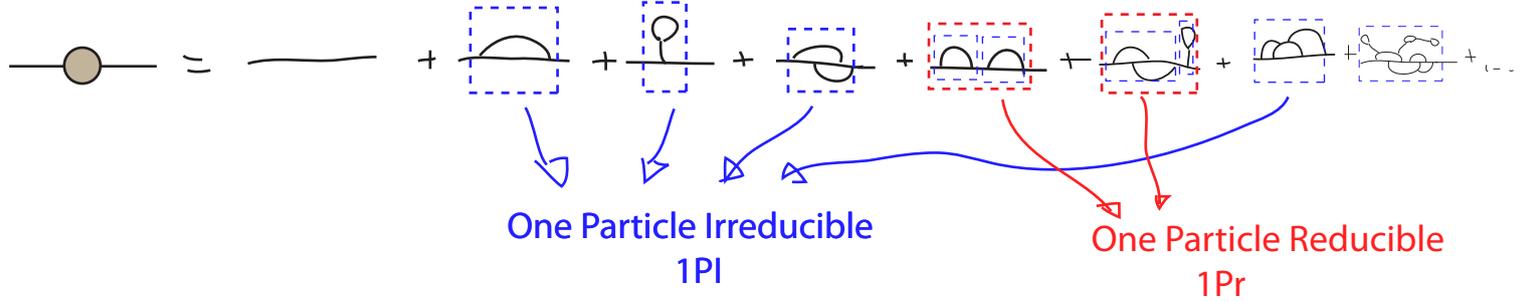
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por: $-\text{1PI} - + -\text{1PI} - \text{1PI} - + -\text{1PI} - \text{1PI} - \text{1PI} - + \dots$

e que estamos re-organizando a série perturbativa: $\mathcal{O}(\lambda^0) + \mathcal{O}(\lambda^1) + \mathcal{O}(\lambda^2) + \dots$ (ACOPL)

Tome uma teoria escalar: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2}{2} \phi^2 - V(\phi)$

a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \rightarrow \text{Diagrama} =$$

$$= \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots =$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots =$$

↳ suprimido por enquanto

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) =$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 7 a 9, sabemos que para uma teoria perturbativa teremos um polo de uma partícula na massa física, com a forma:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

O que nos diz que a auto energia deve ser responsável por mover a posição do polo e mudar seu resíduo. Sabemos também, que uma redefinição do campo faz com que este propagador tenha resíduo igual ao da partícula livre (o que nos livra do Z), vamos então escrever a Lagrangiana em termos desse **campo renormalizado ϕ_r** :

$$\boxed{\phi_r = Z^{-1/2} \phi} \quad (\text{eq. 21.1})$$

$$\boxed{m^2 \equiv m_0^2 Z - \delta m^2} \Rightarrow m_0^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{Z} \quad (\text{eq. 21.2})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2}{2} \phi^2 - V(\phi) =$$

$$= \frac{1}{2} Z \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{Z}{2} \left(\frac{m^2 + \delta m^2}{Z} \right) \phi_r^2 - \underbrace{V(Z^{1/2} \phi_r)}_{V_r(\phi_r)}$$

$$- \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2$$

(a definição de δm^2 foi escolhida para produzir esta forma conveniente)

Assim como a massa de ϕ_r aparece em um formato "canônico", gostaríamos de fazer o mesmo para o termo cinético (como sabemos que o propagador tem uma forma familiar, isso deve ser possível). É bem fácil:

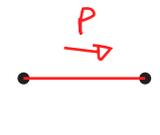
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r + \frac{1}{2} (\mathcal{Z} - 1) \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2 - V_r(\phi_r) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{m^2}{2} \phi_r^2}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{Z}}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2}_{\mathcal{L}_1} - V_r(\phi_r)
 \end{aligned}$$

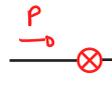
(eq. 22.1)

Estes são camados de **CONTRATERMOS** e note que não mudei o meu modelo (Lagrangiana), apenas estou escrevendo em termos de novas variáveis. É a **MESMA LAGRANGIANA**.

Na teoria livre: $\mathcal{Z} = 1 \iff \delta \mathcal{Z} = 0$
 $m^2 = m_0^2 \iff \delta m^2 = 0$

Logo $\delta \mathcal{Z}$ e δm^2 dependem do acoplamento da teoria, o que justifica incluí-los na parte de interação. Assumindo que faz sentido fazer teoria de perturbação neles (veremos mais adiante que faz) então as regras de Feynman nessas variáveis são:

$\mathcal{L}_0 \rightarrow$  $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

$\mathcal{L}_1 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta \mathcal{Z}}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r \right) \rightarrow i \delta \mathcal{Z} p^2 \\ \left(-\frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2 \right) \rightarrow -i \delta m^2 \\ V_r(\phi_r) \rightarrow \text{depende da interação (chegaremos lá...)} \end{array} \right\} \Rightarrow$  $= i(p^2 \delta \mathcal{Z} - \delta m^2)$

Segundo minha definição de propagador completo (acima) estas novas contribuições são incluídas nos diagramas 1PI:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p)}
 \end{aligned}$$

Calculado com a "nova Lagrangiana", mas não vou batizar de M_r para economizar notação

$$\text{1PI} = \text{tree} + \text{loops}$$

$$-iM^2 = i(p^2 \delta Z - \delta m^2) - iM_{\text{Loop}}^2 \quad (\text{eq. 23.1})$$

Para fixar os contratermos de forma que façam o seu trabalho temos que impor as **Condições de Renormalização**:

(1) m^2 é a massa física:

(posição do polo)

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$$



$$M^2(m^2) = 0 \quad (\text{eq. 23.2})$$

(2) perto do polo o propagador se comporta como:

(valor do resíduo)

$$\left[\text{propagator} \right] \approx \frac{i}{p^2 - m^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m^2}$$

Fazendo uma expansão próximo ao polo:

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} \Big|_{p^2 \rightarrow m^2} \approx \frac{i \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

$$\left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1} = 1$$

(valor do resíduo)

$$\frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad (\text{eq. 23.3})$$

As equações 23.2 e 23.3 fixam o comportamento do lado esquerdo da eq. 23.1 perto do polo, e nos permitiriam obter δZ e δm^2 ordem a ordem em teoria de perturbação (uma vez que tivemos calculado os loops, é claro):

$$M^2(p^2) = -(p^2 \delta Z - \delta m^2) + M_{Loop}^2(p^2) \quad (\text{eq. 24.1 a})$$

$$\left[p^2 \delta Z - \delta m^2 = M_{Loop}^2(p^2) \right]_{p^2=m^2} \quad (\text{eq. 24.1 b})$$

$$\frac{\partial M^2(p^2)}{\partial p^2} = -\delta Z + \frac{d}{dp^2} M_{Loop}^2(p^2) \quad (\text{eq. 24.2 a})$$

$$\left[\delta Z = \frac{d}{dp^2} M_{Loop}^2(p^2) \right]_{p^2=m^2} \quad (\text{eq. 24.2 b})$$

Na prática, a forma que usamos isso é fixando de δZ e δm^2 de forma que um polinômio do tipo $(c_0 + c_1 p^2)$ aparece do lado direito das equações 24.1a ou 24.2a com coeficientes tais que acontece um cancelamento entre contratermos e loops, removendo de $M^2(p^2)$ os termos que violariam as condições de renormalização (23.2 e 23.3). Obviamente se houver termos divergentes nos loops estes terão que ser eliminados, uma vez que as condições 23.2 e 23.3 exigem que o resultado seja finito (de fato, no [esquema de renormalização](#) que usamos acima, o resultado é zero, mas este não é o único esquema possível).

Note que, como todas as contribuições perturbativas para a função de 2 pontos envolvem loops, δZ e δm^2 também são zero a nível árvore, eles estão intrinsecamente ligados aos loops. De fato tudo que é calculado a nível árvore usa o fato de que os propagadores não são corrigidos naquela ordem.

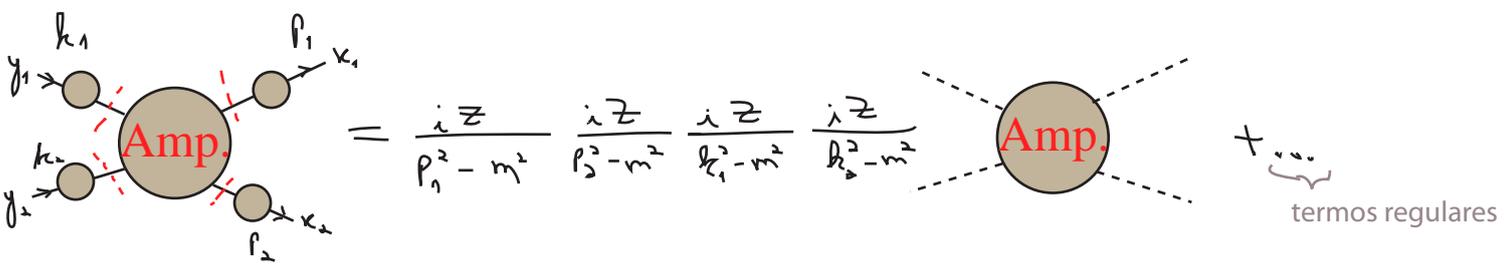
No entanto, devo ser chato mais uma vez e insistir que provavelmente também renormalizaríamos uma teoria em que os loops fossem finitos, sob a pena de descrever nosso sistema em termos de um parâmetro m_0 que não é a massa física da partícula observada, e cuja relação com a massa física deve ser corrigida ordem a ordem em teoria de perturbação.



Funções de Vértice e Renormalização de Acoplamentos

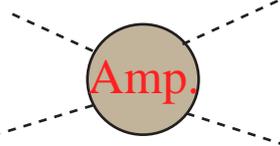
(Ryder 7.3, Peskin 11.5, Cheng & Li 2.1, Schwartz 15.4)

Voltemos agora à função de 4 pontos completa definida na página 20. A discussão acima nos diz que a função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma (antes de qualquer renormalização. Estamos pensando em teorias perturbativas, com as linhas externas sendo estados de 1 partícula "fundamental"):

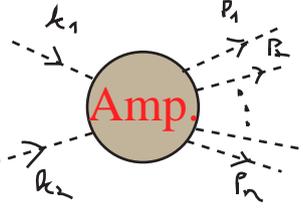


onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 19.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle p_1, p_2 | S | k_1, k_2 \rangle = z^2 \text{ Amp.}$$


Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{z})^{n+2} \text{ Amp.}$$


(eq. 25.1)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em $\lambda\phi^4$):

$$i\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \\ i\Gamma(p_1, p_2, p_3) = -i\lambda_0 + \dots \\ \Gamma(p_1, p_2, p_3) = -\lambda_0 + \dots \end{array} \right\} \text{Diagram } \Gamma^4$$

$$\text{No caso da QED: } \left\{ \begin{array}{l} -ie_0 \Gamma^N(p', p) = -ie_0 \gamma^N + \dots \\ \Gamma^N(p', p) = \gamma^N + \dots \end{array} \right\} \text{Diagram } \Gamma^3$$

Note que no caso da teoria $\lambda\phi^4$ temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas (que é a auto energia definida anteriormente com M^2 no caso escalar, aqui usaremos uma notação geral para outras teorias):

$$\Pi^2(p) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots$$

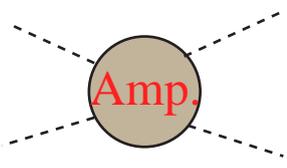
$$\Pi^2(p) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots$$

É importante notar que, a menos de constantes que definimos diferentemente de teoria para teoria (acima incluímos o acomplamento λ de $\lambda\phi^4$ dentro da definição de Γ , ao passo que para QED deixamos a carga fora), estas funções de vértice são as mesmas que definimos em TQC I geradas pelo potencial efetivo Γ (veja as notas de aula de 2022, pgs 177-180, e vídeo 25 da playlist TQC I no YouTube - com o cuidado de que ali fiz tudo no espaço Euclidiano, a versão "Minkowski" pode ser encontrada em Peskin 11.5 e Ryder 7.3).

O que queremos agora é discutir que informação podemos ter sobre estas funções. A discussão começa a ficar difícil de se fazer no abstrato, então começaremos pensando em $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Um espalhamento $2 \rightarrow 2$ será dado pelo elemento da matriz S:

$$\langle p_1 p_2 | S | k_1 k_2 \rangle = \mathcal{Z}^2 \text{ Amp}$$


Que pode ser facilmente reduzido a (basta remover potências de 2π e deltas de momento de ambos os lados):

$$i \mathcal{M}(s, t, u) = i \mathcal{Z}^2 \Gamma(s, t, u)$$

Onde já explicitarei que as funções \mathcal{M} e Γ dependem de apenas três combinações independentes dos momentos, que escolhi como as variáveis de Mandelstam. Sabemos que em primeira ordem de perturbação (nível árvore):

$$\mathcal{Z} = 1 + \mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad \mathcal{M} = -i\lambda_0 + \mathcal{O}(\lambda_0^2)$$

$$\Gamma^{(1)} = -\lambda_0$$

ordem de perturbação (indicated by red arrows pointing to the terms in the expansion)

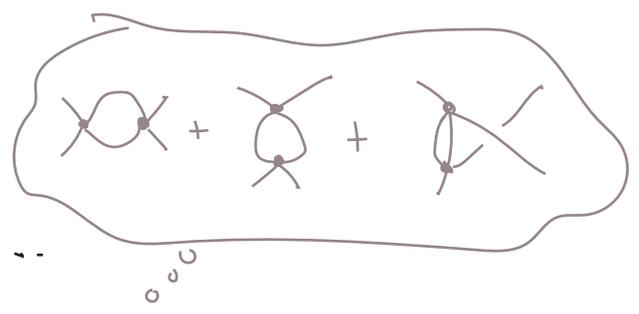
Se esta fosse toda história, a coisa fica fácil, basta fazer um espalhamento com qualquer combinação de energia e momento e medir a seção de choque e usar o resultado (TQC I 2022 - pg 79):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64 \pi^2 s^2} \stackrel{\mathcal{O}(\lambda_0)}{=} \frac{\lambda_0^2}{64 \pi^2 s^2}$$

$$\text{meço } \{s, t, u\} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow{\text{obtenho}} \mathcal{M} \xrightarrow{\text{diretamente}} -\lambda_0 = \mathcal{M}$$

A coisa se complica assim que vamos para NLO:

$$i \mathcal{M} = i \mathcal{Z}^2 (\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda_0^3)) = -i \mathcal{Z}^2 \lambda_0 + i \mathcal{Z}^2 \Gamma^{(2)} + \dots$$



$$\Gamma^{(2)}(s, t, u) \equiv (-i\lambda_0)^2 f(s, t, u)$$

$$i \mathcal{M}(s, t, u) = \mathcal{Z}^2 \left[-i\lambda_0 + i \Gamma^{(2)}(s, t, u) \right]$$

(eq. 26.1)
(lembre que Z também é função de λ_0)

Agora, atribuir um valor para \mathcal{M} experimentalmente só me permite atribuir para λ_0 um valor específico para aquele arranjo (leia-se, para a combinação específica de s, t, u em que foi realizada a medida, e para aquela ordem de perturbação):

$$\begin{array}{c} \text{meço} \\ \{s,t,u\} \end{array} \rightarrow \frac{d\mathcal{V}}{d\Omega} \xrightarrow{\text{obtenho}} \mathcal{M} \xrightarrow{\text{solução de 26.1}} \lambda_0(s, t, u)$$

O que fica ainda pior se as funções de um loop forem divergentes, pois isso pode intruzir escalas novas no problema (quando tentamos controlar as divergências colocando limites na validade do nosso modelo), de forma que:

$$\begin{aligned} f(s, t, u) &\rightarrow f(s, t, u; \{\Lambda\}) \\ \lambda_0(s, t, u) &\rightarrow \lambda_0(s, t, u; \{\Lambda\}) \end{aligned}$$

Um ou mais novos parâmetros ↙

Nossa teoria não pode depender destes $\{\Lambda\}$ porque eles representam nossa ignorância sobre o que acontece em escalas muito maiores ou menores (de tamanho ou de energia, por exemplo) do que aquela que estamos descrevendo, mas λ_0 certamente vai depender deles. Queremos uma constante de acoplamento que seja um número, representando a intensidade da interação e que possa ser obtida de **uma medida feita nas escalas que estamos querendo descrever**. Por isso definimos esta **constante de acoplamento renormalizada** como o valor obtido diretamente de uma medida em uma escala de referência (**com valores fixos $\{s_0, t_0, u_0\}$**):

$$-i\lambda \equiv i\mathcal{M}(s_0, t_0, u_0) = Z^2 \left[-i\lambda_0 + i\Gamma^{(2)}(\lambda_0; s_0, t_0, u_0; \{\Lambda\}) \right]$$

↳ Esta condição define a constante de acoplamento física e exige o cancelamento de parâmetros ou escalas não físicos **deste lado**.

$$\lambda = Z^2 \lambda_0 - \Gamma^{(2)}(s_0, t_0, u_0)$$

Que de forma mais geral definiremos:

$$\delta\lambda \equiv \lambda_0 Z^2 - \lambda \quad (\text{eq 27.1})$$

↳ incluindo correções de qualquer ordem
↳ $\delta\lambda = \Gamma^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda_0^3)$

a previsão que sai daqui é que elementos de matriz "medidos" (por abuso de linguagem, o que meço é a seção de choque) em pontos diferentes do espaço $\{s, t, u\}$ terão valores diferentes. Além disso, qualquer diferença entre duas medidas físicas finitas deve ser finita, e portanto:

$$\mathcal{M}(s_1, t_1, u_1) - \mathcal{M}(s_0, t_0, u_0) \approx \overbrace{g(\lambda, s_1, t_1, u_1)}^{\text{FINITA}}$$

onde g é uma função que posso obter se calcular os loops da teoria. Portanto a TQC **deve ser capaz de prever como \mathcal{M} vai mudar quando nos afastamos deste ponto de referência**. Note que este é um efeito novo que só surge após a inclusão de loops na teoria (ele ocorre além de outras possíveis dependências em momentos e energia, tal como em teorias em há interações envolvendo derivadas na Lagrangiana)

Na página 22 implementamos a mudança para as variáveis renormalizadas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi) =$$

$$\begin{aligned} z &= 1 + \delta z \\ \phi_r &= z^{-1/2} \phi \\ m^2 &= m_0^2 z - \delta m^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 + \frac{\delta z}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2 - V_r(\phi_r)$$

Agora fazemos o mesmo para o potencial:

$$V(\phi) = \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \Rightarrow V_r(\phi_r) = \frac{z^2 \lambda_0}{4!} \phi_r^4 = \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 + \frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4$$

$\phi = z^{1/2} \phi_r$ $z^2 \lambda_0 = \lambda + \delta \lambda$ *novos contra-termos!*

O que nos dá duas regras de Feynman novas:

$$V_r(\phi_r) \rightarrow \text{diagrama com ponto vermelho} = -i \lambda \quad \text{diagrama com ponto vermelho e círculo} = -i \delta \lambda$$

nos permite re-escrever a função de vértice:

$$\begin{aligned} i \Gamma_r &= \text{diagrama com ponto vermelho} + \text{diagrama com ponto vermelho e círculo} + \text{diagrama com loop} + \text{diagrama com loop e círculo} + \text{diagrama com loop e círculo} + \dots \\ &= -i \lambda - i \delta \lambda + i \Gamma_r^{(2)}(s, t, u) + \dots \end{aligned}$$

e consequentemente calcular o elemento de matriz (que nestas variáveis não tem fatores de Z):

$$i \mathcal{M} = i \Gamma_r(s, t, u) = -i \lambda - i \delta \lambda + i \Gamma_r^{(2)}(s, t, u) \quad (\text{eq. 28.1})$$

Mais uma vez, temos uma **condição de renormalização** para fixar $\delta \lambda$, neste caso a exigência de que em um ponto de referência $\{s_0, t_0, u_0\}$ medimos λ :

$$\mathcal{M} = -\lambda = \Gamma_r(s_0, t_0, u_0) \quad (\text{eq. 28.2})$$

$$(eq. 28.1) \Rightarrow \left[-\lambda = -\lambda - \delta\lambda + \Gamma_{\pi}^{(2)}(s_0, t_0, u_0) \right]$$

$$\downarrow$$

$$\delta\lambda = \Gamma_{\pi}^{(2)}(s_0, t_0, u_0) \quad (eq. 29.1)$$

Onde mais uma vez vemos um cancelamento entre contratermos e a contribuição dos loops funcionando para definir um acoplamento "físico" (em um ponto de referência), além de cancelar eventuais infinitos que estejam nos perturbando. Sabendo o valor do elemento de matriz em uma escala, podemos então obtê-lo em outras:

$$\mathcal{M}(s, t, u) = \lambda + \Gamma_{\pi}^{(2)}(s, t, u) - \Gamma_{\pi}^{(2)}(s_0, t_0, u_0)$$

$$\mathcal{M}(s_2, t_2, u_2) - \mathcal{M}(s_1, t_1, u_1) = \underbrace{\Gamma_{\pi}^{(2)}(s_2, t_2, u_2) - \Gamma_{\pi}^{(2)}(s_1, t_1, u_1)}_{\text{FINITO!}}$$

$\lambda\phi^4$ a um loop, Regularização de Pauli-Villars

(Peskin 10.2, Cheng & Li 2.3, Nastase 33.2)

Resumindo o que já obtivemos para $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m_0^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \quad \begin{array}{l} \text{pg 28} \\ \Downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{eqs.} \\ 21.1, 21.2 \\ 22.1, 27.1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} z = 1 + \delta z & \delta\lambda = \lambda_0 z^2 - \lambda \\ \phi_r = \bar{z}^{-1/2} \phi & m^2 = m_0^2 z - \delta m^2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 + \frac{\delta z}{2} \partial^\mu \phi_r \partial_\mu \phi_r - \frac{\delta m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\delta\lambda}{4!} \phi_r^4$$

com os contratermos satisfazendo as condições:

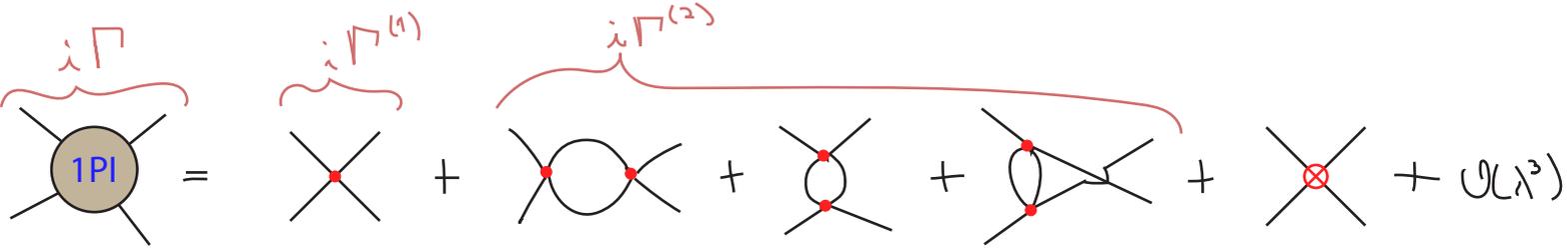
$$(24.1b) \quad \left[p^2 \delta z - \delta m^2 = M_{\text{loop}}^2(p^2) \right]_{p^2 = m^2}$$

$$(24.2b) \quad \delta z = \frac{dM_{\text{loop}}^2}{dp^2} \Big|_{p^2 = m^2}$$

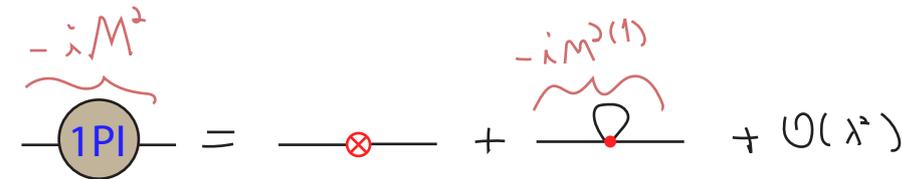
$$(29.1) \quad \delta\lambda = \Gamma_{\pi}^{(4)}(s, t, u) \Big|_{\{s, t, u\} = \{s_0, t_0, u_0\}}$$

(vou suprimir esta notação "r")

Temos portanto que calcular a primeira contribuição com loops para $M^2 \not\sim \Gamma$



uma vez que o contratermo tem que cancelar parte da contribuição dos loops: $\hookrightarrow O(\lambda^2)$



Vamos começar com esta última.

Função de dois pontos

Queremos calcular o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} P \\ \rightarrow \end{array} \text{diagram} = -i \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Fica fácil ver que esta integral diverge fazendo a rotação de Wick (TQC I, pgs 38-47; TQC I vídeo 6; e revisaremos em breve):

$$k_0 = i k_4 \implies k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_4^2 - \vec{k}^2 \equiv -k_E^2$$

$$d^4 k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 = i dk_4 \dots dk_1 = i d^4 k_E$$

$$\begin{array}{c} P \\ \rightarrow \end{array} \text{diagram} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{i d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{-k_E^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$d^4 k_E \rightarrow$ Medida de integração em 4D Euclidiano (posso escrever em coordenadas esféricas 4D):

$$k_E^N \equiv \begin{cases} k_E \sin(\omega) \sin(\theta) \cos(\phi) \\ k_E \sin(\omega) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ k_E \sin(\omega) \cos(\theta) \\ k_E \cos(\omega) \end{cases}$$

$k_E \geq 0 \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad 0 \leq \omega, \theta \leq \pi$

$$d^4 k_E = k_E^3 dk_E d\Omega_E \quad d\Omega_E \equiv \sin^2(\omega) \sin(\theta) d\phi d\omega d\theta$$

$$\frac{-i\lambda}{2} \int \frac{dk_E k_E^3 d\Omega_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = \frac{-i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk_E k_E^3}{k_E^2 + m^2} = \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{-i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dk_E k_E^3}{k_E^2 + m^2} \right]$$

$\int d\Omega_E = 2\pi^2$

Fica claro que o limite superior é problemático, nesta região podemos desprezar a massa e o integrando se comporta como k_E^3/k_E^2 , logo:

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2} \approx \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{-i\lambda}{16\pi^2} \frac{\Lambda^2}{2} + \dots \right]$$

↳ termos finitos ou menos "explosivos" do que Λ^2

O fato é que a integral tem um número grande de potências do momento no numerador, quando comparado ao denominador (para isso não divergir pelo menos como um logaritmo, deveríamos ter uma potencia $n+2$ no numerador acompanhando uma potência n no denominador):

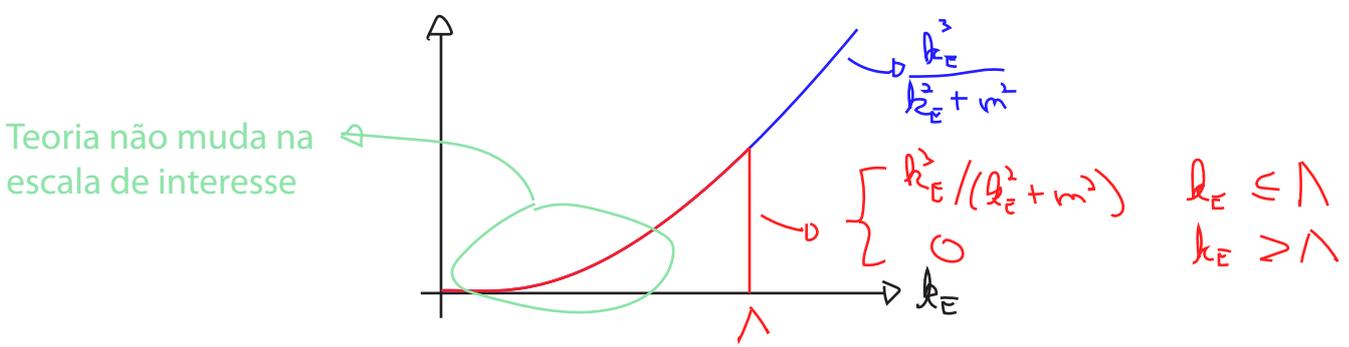
$$\int_n^\infty \frac{dk_E k_E^n}{k_E^{n+1}} \rightarrow \infty \qquad \int_n^\infty \frac{dk_E k_E^n}{k_E^{n+2}} \rightarrow \text{FINITE}$$

O processo pelo qual modificamos a integral para obter algo finito, mas que obviamente volta a divergir em algum limite, é chamado de **REGULARIZAÇÃO**. De fato, acabamos de fazer isso, quando escrevemos:

$$\frac{-i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk_E k_E^3}{k_E^2 + m^2} \longrightarrow \frac{-i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dk_E k_E^3}{k_E^2 + m^2}$$

(note que estou suprimindo o $\lim \Lambda \rightarrow \infty$, pois vou continuar manipulando a expressão e só tomar este limite mais tarde, quando supostamente já o terei eliminado o parâmetro de observáveis físicos)

esta é chamada de **Regularização por Cutoff**. A razão física pela qual esperamos que isto dê certo, ou seja, de que observáveis não dependam de Λ , é que estamos alterando nossa teoria apenas em escalas distantes de onde a teoria é válida. Podemos pensar isso como se estivéssemos alterando o integrando da seguinte forma:



se conseguimos uma descrição que não depende desta **física ULTRAVIOLETA** então deveríamos conseguir eliminar Λ olhando os observáveis corretos. Esse cutoff mais simples tem o defeito de quebrar a simetria translacional no espaço de momentos, o que pode atrapalhar muito se tivermos que continuar manipulando o integrando. Então utilizaremos uma versão mais sofisticada de cutoff, a **Regularização de Pauli-Villars**, que consiste em fazer a seguinte modificação nos propagadores que aparecem nas integrais de loop:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \sum_i \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2 + i\epsilon}$$

Pauli-Villars (eq. 31.1)

Note que se os coeficientes a_i forem negativos, e $\Lambda_i \gg m$, estarei subtraindo propagadores no UV. Aí basta escolher um número suficientemente grande (junto com valores apropriados de a_i) para fazer a integral convergir. Você pode arriscar uma interpretação disso em termos de partículas novas a altas energias, mas note que o cancelamento não é muito fácil de se obter (partículas escalares teriam que ter a estatística fermiônica para ter esse sinal negativo). O importante é que temos uma modificação dos integrandos que altera o UV, mantém a física a baixos momentos inalterada e não quebra a invariância translacional da integral. O limite que recupera a integral original é:

$$\Lambda_i \rightarrow \infty$$

No caso que queremos resolver, precisamos obter uma potência igual ou maior a 5 no denominador do integrando. Isso pode ser obtido com a substituição:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon}$$

Que no limite $k^2 \rightarrow \infty$ ($m^2 \ll \Lambda^2 \ll k^2$) \Rightarrow $\approx \frac{1 + a_1 + a_2}{k^2}$

(só conseguimos potências pares deste jeito)

A soma dos três propagadores é (posso fazer $\epsilon \rightarrow 0$ no numerador):

$$\frac{(1 + a_1 + a_2) k^4 - [a_1(m^2 + \Lambda_2^2) + a_2(m^2 + \Lambda_1^2) + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2] k^2 + m^2(a_2 \Lambda_1^2 + a_1 \Lambda_2^2) + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon)}$$

Como não quero também ganhar potências de momento no numerador, escolho ai satisfazendo:

$$(1 + a_1 + a_2) = 0$$

$$[a_1(m^2 + \Lambda_2^2) + a_2(m^2 + \Lambda_1^2) + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2] = 0$$

$$a_1 = \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}$$

$$a_2 = \frac{m^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2}$$

$$m^2(a_2 \Lambda_1^2 + a_1 \Lambda_2^2) + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \stackrel{\text{green}}{=} (\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)$$

De forma que, finalmente:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{(\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon)}$$

Como os dois Λ s são arbitrários, posso simplificar fazendo: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$

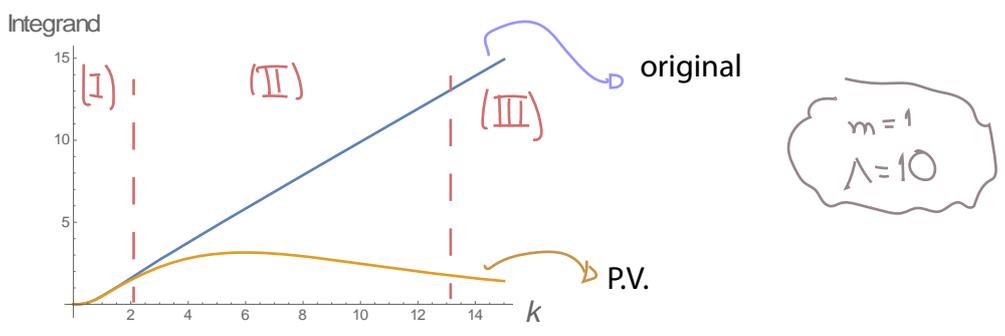
$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{\Lambda^4}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2}$$

Note que o que estamos fazendo é um cutoff "suave", temos três regiões onde o integrando se comporta como:

(I) $k \ll \Lambda$: (II) $k \sim \Lambda$: (III) $k \gg \Lambda$

$\sim \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}$: $\frac{\Lambda^4}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2}$: $\sim \frac{\Lambda^4}{k^6}$

ou seja, a física a baixos momentos não muda, mas eu "corto" o UV:



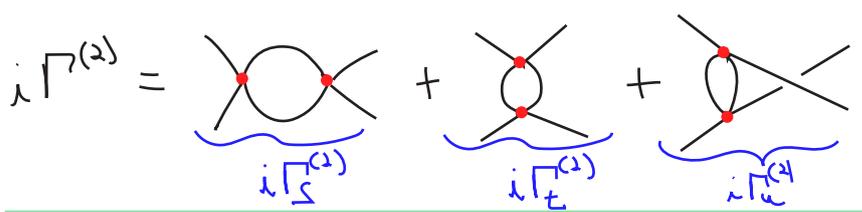
finalmente:

$$i\Gamma^{(2)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2}$$

(eq. 33.1)

Que não parece uma integral fácil de resolver. Felizmente há todo um ferramental desenvolvido para resolver integrais deste tipo, que veremos a seguir, mas antes vamos aplicar a mesma regularização à função de quatro pontos:

Função de quatro pontos



$$i\Gamma^{(4)} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

(eq. 33.2)

$P \equiv p_1 + p_3 \rightarrow p^2 = S$

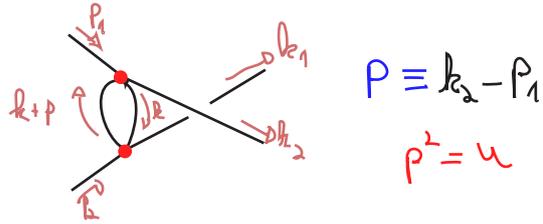
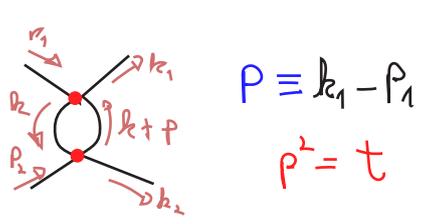
Algumas coisas que podemos dizer sobre $\Gamma_S^{(2)}$:

(I) É uma função escalar de p e, como não pode depender de k : $\Gamma_S^{(2)} = \Gamma_S^{(2)}(p^2) = \Gamma_S^{(2)}(s)$

(II) É divergente, e diverge como: $\int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \text{Log}(\Lambda)$

(formalmente tenho que "Wick rodar" para o euclideo, então imagine que fiz isso direito e cheguei a esta conclusão)
(eq. 34.1)

Os outros dois diagramas têm expressões idênticas (só muda a definição de p):



Então podemos eliminar a notação inicial e escrever:

$$i\Gamma^{(2)} = i\Gamma_q(p^2 = s) + i\Gamma_q(p^2 = t) + i\Gamma_q(p^2 = u)$$

$$\Gamma_q(p^2) \equiv \Gamma_s(p^2) = \Gamma_t(p^2) = \Gamma_u(p^2)$$

É bastante útil escrever a série de Taylor em torno de $p^2 = 0$ para esta função:

$$\Gamma_q(p^2) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 p^2 + \dots + \frac{1}{n!} \mathcal{L}_n (p^2)^n + \dots ;$$

$\mathcal{L}_n \equiv \Gamma'_q(0)$

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{d^n \Gamma_q(p^2)}{d(p^2)^n} \Big|_{p^2=0}$$

porque as divergências vão estar contidas nos primeiros coeficientes da série. Para ver isso considere que:

$$\frac{\partial f(p^2)}{\partial p_\nu} = \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2} \frac{\partial p^2}{\partial p_\nu} = 2 p^\nu \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2}$$

$$p_\nu \frac{\partial f(p^2)}{\partial p_\nu} = 2 p_\nu p^\nu \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2} \Rightarrow \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2} = \frac{p_\nu}{2 p^2} \frac{\partial f(p^2)}{\partial p_\nu}$$

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial \Gamma_q(p^2)}{\partial p^2} &= \frac{\lambda^2}{2} \frac{p_\nu}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left(\frac{1}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right) \\
 &= -\frac{\lambda^2}{2 p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p) \cdot p}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) [(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]^2}
 \end{aligned}$$

- $[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]^{-2}$ $\partial(k'+p')$

Que converge melhor do que antes da derivada:

$$\frac{\partial \Gamma_q(p^2)}{\partial p^2} \sim \int \frac{k_\nu d^4 k}{k^2 [(k^2)]^2} \sim \frac{1}{\Lambda} \quad \checkmark$$

~ k_E^4
~ k_E^6

Esse termo já é convergente, e se formos mais adiante na série de Taylor aumentamos cada vez mais as potências de k no denominador. Assim, podemos simplificar nosso trabalho e escrever:

$$\Gamma_q(p^2) = \Gamma_q(0) + \underbrace{\tilde{\Gamma}_q(p^2)}_{\text{todo o resto da série de Taylor (não estou truncando nada)}} \quad (\text{eq. 35.1})$$

$$\tilde{\Gamma}_q(p^2) \text{ é finito, e vale: } \tilde{\Gamma}_q(0) = 0$$

ATENÇÃO PARA ESTE PONTO: é verdade de uma forma geral que tomar **derivadas** no momento destas funções de n -pontos **aumenta a convergência**. Usaremos isto de forma mais sistemática adiante, para contar e classificar as divergências de uma teoria. Também podemos usar isto como uma regularização em si mesma (veja Nastase sec. 33.3)

A regularização de Pauli-Villars aqui é mais simples, porque na eq. 34.1 vimos que já temos k^4 no denominador. Só precisamos mudar um dos propagadores e só subtraímos 1 propagador:

$$\begin{aligned}
 i \Gamma_q(p^2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\
 &\stackrel{\text{P.V.}}{\downarrow} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} - \frac{i \frac{1}{\Lambda^2}}{(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \right] \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\
 &\quad \frac{i(m^2 - \Lambda^2) \sim -\Lambda^2}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Temos então:

$$i\tilde{\Gamma}_k(0) = -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \quad \left(\begin{array}{l} \Lambda \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \end{array} \right) \frac{k_E^3}{k_E^4} \sim \log(\Lambda) \quad \text{(eq. 36.1)}$$

↳ de novo há um certo abuso aqui, só é verdade que $p^2=0 \Rightarrow p=0$ no espaço euclidiano estamos fazendo isso aqui porque pretendemos mesmo rodar para o euclidiano para fazer a integral em $d^4 k$ (em coordenadas esféricas 4D). Então isso será verdade.

$$i\tilde{\Gamma}_k(p^2) = i(\Gamma_k(p^2) - \Gamma_k(0)) =$$

$$= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} +$$

$$+ \frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} =$$

$$= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} \left[\cancel{(k^2 - m^2)} - \frac{k^2 + 2k \cdot p + p^2}{[(k+p)^2 - m^2]} \right] =$$

$$D \equiv (k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon) [(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]$$

↳ $\Lambda \rightarrow \infty \sim -\Lambda^2$

O que nos permite verificar que esta parte de fato é finita:

$$i\tilde{\Gamma}_k(p^2) = \frac{-\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} (-2k \cdot p - p^2) \quad \text{(eq. 36.2)}$$

$$\underline{\underline{\Lambda \rightarrow \infty}} \quad \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2k \cdot p - p^2)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 [(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \sim \frac{k_E^4}{k_E^6} \checkmark$$

Parametrização de Feynman e rotação de Wick

(Peskin 6.3, Cheng & Li 2.3, Nastase 33.5 & 32.2)

Agora queremos ir adiante e calcular as integrais em 33.1, 36.1 e 36.2. A **primeira ferramenta** que vai nos ajudar é chamada de **Parametrização de Feynman**, que nos dá uma forma de combinar os vários fatores que tipicamente aparecem no denominador em um único fator. A versão mais simples é a fórmula:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

$\int_B^A \frac{1}{(A-B)u^2} = \frac{1}{(A-B)} \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{B} \right] = \frac{1}{AB}$

Parâmetros de Feynman

A partir desta podemos obter outras, tomando por exemplo derivadas:

$$\frac{1}{AB^2} = -\frac{d}{dB} \left(\frac{1}{AB} \right) = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[xA + (1-x)B]^3} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{2y}{[xA + yB]^3}$$

$$\frac{2}{AB^3} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{2 \cdot 3 \cdot y^2}{[xA + yB]^4}$$

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{n y^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}$$

(eq. 37.1)

Ou para vários termos:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}$$

(eq. 37.2)

(A prova deste é feita por indução, partindo da fórmula para $1/(AB)$, pode ser encontrada em:

<https://www.youtube.com/watch?v=A5jF19viwsY>

ou na entrada do Wikipedia para a Param. de Feynman - só que usando outra parametrização, a de Schwinger)

Começaremos aplicando esta parametrização à eq. 36.2 (com $\Lambda \rightarrow \infty$, uma vez que esta parte é finita neste limite)

(eq. 36.2)

$$\Downarrow \tilde{\Gamma}_k(p^2) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2k \cdot p - p^2)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 [(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Podemos usar 37.1: $\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{n y^{n-1}}{[xA+yB]^{n+1}} = \int_0^1 dx \frac{n(1-x)^{n-1}}{[xA+(1-x)B]^{n+1}}$

$$\frac{1}{\underbrace{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}_B \underbrace{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}_{A, n=2}} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{\underbrace{[x[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon] + (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon)]}_D^3}$$

$$D = x[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon] + (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon) = k^2 + 2k \cdot p x + p^2 x - m^2 + i\epsilon$$

$$\tilde{\Gamma}_k(p^2) = \lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2k \cdot p - p^2)(1-x)}{D^3}$$

Uma das vantagens da parametrização de Feynman é que podemos "completar quadrado" com uma mudança de variáveis no momento, fazendo este denominador ser uma função apenas do módulo ao quadrado do momento (o que facilita muito para integrar).

ou seja, quero definir: $l_\mu = k_\mu + K_\mu$ / $l^2 = k^2 + 2k \cdot p x + p^2 x$ } $K_\mu = x p_\mu$
 $\hookrightarrow l^2 = k^2 + 2k \cdot K + K^2$

$$\boxed{l_\mu \equiv k_\mu + x p_\mu} \rightarrow d^4 k \rightarrow d^4 l$$

$$\hookrightarrow D = l^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\epsilon \equiv l^2 - \Delta^2 + i\epsilon$$

$$\hookrightarrow -2k \cdot p - p^2 = -2l \cdot p - p^2 + 2p^2 x = -2l \cdot p + (2x-1)p^2$$

$$\tilde{\Gamma}_k(p^2) = \lambda^2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(2x-1)p^2 - 2l \cdot p}{[l^2 - \Delta^2 + i\epsilon]^3}$$

Δ^2 (ímpar)

$$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)p^2$$

(eq. 38.1)

$$i \tilde{\Gamma}_k(p^2) = \lambda^2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{i d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{-(2x-1)p^2}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3}$$

Como o integrando só depende do módulo do momento, fica fácil fazer a parte angular da integração em 4D (veja pg 30):

$$\int d^4 l_E f(l_E) = \int l_E^3 dl_E d\Omega_E f(l_E) = 2\pi^2 \int_0^\infty dl_E l_E^3 f(l_E)$$

$dl_E l_E^3 = \frac{1}{2} dl_E^2$

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dl_E^2}{2} \frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3} = \frac{1}{16\pi^2 \Delta^2} \int_0^\infty du \frac{u}{[1+u-i\epsilon]^3}$$

$u = l_E^2 / \Delta^2$

A integral é uma das formas integrais da função beta:

$$B(z_1, z_2) = \int_0^\infty du \frac{u^{z_1-1}}{(1+u)^{z_1+z_2}} = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$$

$$\int_0^\infty du \frac{u^{z_1-1}}{(u+A)^{z_1+z_2}} = \frac{1}{A^{z_2}} \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$$

que podemos expressar em termos de funções gamma

no nosso caso: $z_1 = 2$; $z_2 = 1$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3} = \frac{B(2, 1)}{16\pi^2 (\Delta^2 - i\epsilon)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{16\pi^2 (\Delta^2 - i\epsilon)\Gamma(3)} = \frac{1}{32\pi^2 (\Delta^2 - i\epsilon)}$$

$(UAV!)$ (eq. 40.1)

$$i \tilde{\Gamma}_k(p^2) = \frac{-i\lambda^2 p^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)(2x-1)}{\Delta^2 - i\epsilon}$$

$$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)p^2$$

(eq. 40.2)

Note que temos comportamentos distintos dependendo do valor de p^2 :

$$\left. \begin{aligned} m^2 - x(1-x)p^2 > 0 \\ 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow p^2 < 4m^2 \Rightarrow \Delta^2 \neq 0 \text{ (posso ignorar o } i\epsilon)$$

$p^2 \geq 4m^2$ (a integral em x passa por polos que ficam próximos aos extremos de integração para p^2 grande)

A resposta para integral em x é (Cheng & Li 2.3, eq 2.87):

(eq. 41.1)

$$i\tilde{\Gamma}_e(p^2) = \begin{cases} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(2 + \sqrt{\frac{4m^2 + |p^2|}{|p^2|}} \operatorname{Ln} \left[\frac{\sqrt{4m^2 + |p^2|} - \sqrt{|p^2|}}{\sqrt{4m^2 + |p^2|} + \sqrt{|p^2|}} \right] \right) & p^2 < 0 \\ \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(2 - 2\sqrt{\frac{4m^2 - p^2}{p^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \left[\sqrt{\frac{p^2}{4m^2 - p^2}} \right] \right) & 0 \leq p^2 < 4m^2 \\ \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(2 + \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{p^2}} \operatorname{Ln} \left[\frac{\sqrt{p^2} - \sqrt{p^2 - 4m^2}}{\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2 - 4m^2}} \right] + i\pi \right) & p^2 \geq 4m^2 \end{cases}$$

segundo a referência acima a integral é "straightforward", para ter ideia do que isso significa, vamos fazer o caso $p^2 < 0$:

$$p^2 < 0 \Rightarrow i\tilde{\Gamma}_e(p^2) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)(2x-1)|p^2|}{m^2 + x(1-x)|p^2|}$$

$p^2 = -|p^2|$

I

$$\frac{(1-x)(2x-1)|p^2|}{m^2 + x(1-x)|p^2|} = 2 - \frac{2m^2 + p^2(1-x)}{m^2 + x(1-x)|p^2|} = 2 + \frac{2\frac{m^2}{|p^2|} + (1-x)}{(x-F_+)(x-F_-)}$$

$$F_{\pm} = \frac{|p^2| \pm \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|}}{2|p^2|}$$

$$= 2 - \frac{4m^2 + |p^2| - \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|}}{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (1-2x)} - \frac{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|}}{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (-1+2x)}$$

$$\text{I} = 2 - \frac{(4m^2 + |p^2| - \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|}) \operatorname{Ln} \left[\frac{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (1-2x)}{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (-1+2x)} \right]_0^1}{(-2\sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|})}$$

$$- \frac{(4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|}) \operatorname{Ln} \left[\frac{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (-1+2x)}{4m^2 + |p^2| + \sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|} (1-2x)} \right]_0^1}{(2\sqrt{|p^2|} \sqrt{4m^2 + |p^2|})}$$

$$\underline{I} = 2 - \frac{(\gamma m^2 + |\rho^1| - \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})}{(-2 \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| - \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right] + \frac{(\gamma m^2 + |\rho^1| - \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})}{(-2 \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| + \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right] +$$

$$- \frac{(\gamma m^2 + |\rho^1| + \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})}{(2 \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| + \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right] + \frac{(\gamma m^2 + |\rho^1| + \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})}{(2 \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|})} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| - \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right]$$

$$\underline{I} = 2 + \frac{\sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|}}{\sqrt{|\rho^1|}} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| - \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right] - \frac{\sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|}}{\sqrt{|\rho^1|}} L_N \left[4m^2 + |\rho^1| + \sqrt{|\rho^1|} \sqrt{\gamma m^2 + |\rho^1|} \right]$$

$$\underline{I} = 2 + \sqrt{\frac{\gamma m^2 + |\rho^1|}{|\rho^1|}} L_N \left[\frac{\sqrt{4m^2 + |\rho^1|} - \sqrt{|\rho^1|}}{\sqrt{4m^2 + |\rho^1|} + \sqrt{|\rho^1|}} \right] //$$

Algumas observações importantes sobre o resultado em 41.1:

(1) No caso do diagrama que chamamos de $i\Gamma_s^{(2)}$ na página 33, apenas a região $p^2 > 0$ é física (p é a soma de p_1 e p_2 , ambos momentos on-shell em um espalhamento físico). A vantagem de olhar todas as regiões é que podemos usar esse loop dentro de outros diagramas e o resultado também servir para os **canais t e u**.

(2) no momento em que p^2 fica maior que $4m^2$, $\Gamma_s^{(2)}$ deixa de ser puramente Real para e desenvolve uma parte imaginária. Isso acontece justamente porque a partir deste ponto as duas linhas internas do diagrama podem estar on-shell. Veremos isso com mais detalhe adiante.

Agora queremos fazer o mesmo para 36.1

$$\stackrel{(36.1)}{\Downarrow} i\Gamma_k(0) = - \frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)}$$

Passo 1: parametrização de Feynman

$$\stackrel{(37.1)}{\Uparrow} i\Gamma_k(0) = - \frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{\left[x(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon) + (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon) \right]^3}$$

$$\mathcal{D} = k^2 - x\Lambda^2 + (x-1)m^2 + i\epsilon \equiv k^2 - \Delta^2 + i\epsilon$$

$$\Delta^2 = x\Lambda^2 - (x-1)m^2$$

(neste caso nem precisamos completar quadrado no denominador, já não há termo linear em k)

$$i\Gamma_k(0) = -\lambda^2 \Lambda^2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \Delta^2 + i\epsilon]^3}$$

Passo 2: rotação de Wick e integrais no momento

A análise de onde estão os polos e como podemos rodar é exatamente a mesma da página 39 (aqui de fato $\Delta^2 > 0$ sempre), fazemos:

$$k_0 = i k_4 \quad k^2 = -k_E^2$$

$$i\Gamma_k(0) = i\lambda^2 \Lambda^2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3}$$

já fizemos esta! (pg 40, eq. 40.1)

$$= i\lambda^2 \Lambda^2 \int_0^1 dx (1-x) \frac{1}{32\pi^2 (\Delta^2 - i\epsilon)} = \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{x\Lambda^2 - (x-1)m^2 - i\epsilon}$$

Passo 3: integral nos parâmetros de Feynman (quando possível):

$$i\Gamma_k(0) = \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \cdot \left[\frac{(m^2 - \Lambda^2) + \Lambda^2 \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right]}{(m^2 - \Lambda^2)^2} \right] =$$

$$= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{(m^2/\Lambda^2 - 1) + \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right]}{(m^2/\Lambda^2 - 1)^2} \right] =$$

$$\stackrel{m^2/\Lambda^2 \sim 0}{=} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] - 1 \right] \stackrel{\Lambda \rightarrow \infty}{\approx} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right]$$

$$i\Gamma_k(0) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \quad (\text{eq. 43.1})$$

E finalmente podemos terminar o cálculo da função de dois pontos:

$$(33.1) \quad \text{Diagram} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2} =$$

Passo 1: parametrização de Feynman

$$\text{Diagram} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Lambda^4 \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[x(k^2 - m^2 + i\epsilon) + (1-x)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)]^3} =$$

Podemos deixar isso mais parecido com a integral da página 42, fazendo: $y = 1-x$

$$= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Lambda^4 \int_0^1 dy \frac{2y}{[(1-y)(k^2 - m^2 + i\epsilon) + y(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)]^3} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \Lambda^4 \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \Delta^2 + i\epsilon]^3}$$

$\Delta^2 = y\Lambda^2 - (y-1)m^2$

Passo 2: rotação de Wick e integrais no momento

$$\text{Diagram} = \frac{-i\lambda}{2} \Lambda^4 \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3} =$$

$\underbrace{\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^3}}_{(40.1)}$
 $\underbrace{\frac{1}{32\pi^2(\Delta^2 - i\epsilon)}}_{\text{from (40.1)}}$

$$= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \Lambda^4 \int_0^1 dy \frac{y}{y\Lambda^2 - (y-1)m^2 - i\epsilon}$$

Passo 3: integral nos parâmetros de Feynman (quando possível):

$$\text{Diagram} = \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \Lambda^4 \frac{(\Lambda^2 - m^2) + m^2 \text{Li} \left[\frac{m^2}{\Lambda^2} \right]}{(m^2 - \Lambda^2)^2} \approx \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \text{Li} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \right]$$

De posse das equações 41.1, 43.1 e 44.1 podemos finalmente obter um valor para os contra-termos e calcular o elemento de matriz em NLO. Começando com a função de 4-pontos, temos:

$$(29.1) \Rightarrow \delta \lambda = \Gamma^{(2)}(s_0, t_0, u_0)$$

$$i \Gamma^{(2)}(s, t, u) = i \Gamma_R(s) + i \Gamma_R(t) + i \Gamma_R(u)$$

$$(35.1) \Rightarrow \Gamma_R(p^2) = \Gamma_R(0) + \tilde{\Gamma}_R(p^2)$$

Façamos uma escolha conveniente (não necessariamente do ponto de vista experimental):

$$\{s_0, t_0, u_0\} = \{4m^2, 0, 0\}$$

$$\delta \lambda = \underbrace{\Gamma_R(4m^2)}_v + 2 \Gamma_R(0) = \tilde{\Gamma}_R(4m^2) + 3 \Gamma_R(0)$$

$$v = \Gamma_R(0) + \tilde{\Gamma}_R(4m^2)$$

$$(41.1) \Rightarrow \tilde{\Gamma}_R(4m^2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left(2 + \sqrt{\frac{4m^2 - 4m^2}{4m^2}} \text{LN} \left[\frac{\sqrt{4m^2} - \sqrt{4m^2 - 4m^2}}{\sqrt{4m^2} + \sqrt{4m^2 - 4m^2}} \right] + i\pi \right)$$

$$(43.1) \Rightarrow \Gamma_R(0) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \text{LN} \left[\frac{\lambda^2}{m^2} \right]$$

$$\delta \lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} (2 + i\pi) + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \text{LN} \left[\frac{\lambda^2}{m^2} \right] = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[3 \text{LN} \left[\frac{\lambda^2}{m^2} \right] + 2 + i\pi \right]$$

(eq. 45.1)

$$\mathcal{M} = -\lambda - \underbrace{\delta \lambda}_v + \underbrace{\Gamma^{(2)}(s, t, u)}_{3\Gamma_R(0) + \tilde{\Gamma}_R(s) + \tilde{\Gamma}_R(t) + \tilde{\Gamma}_R(u)} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$= -\lambda - (\tilde{\Gamma}_R(4m^2) + 3\Gamma_R(0)) + 3\Gamma_R(0) + \tilde{\Gamma}_R(s) + \tilde{\Gamma}_R(t) + \tilde{\Gamma}_R(u) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\mathcal{M}(s, t, u) = -\lambda + \tilde{\Gamma}_R(s) + \tilde{\Gamma}_R(t) + \tilde{\Gamma}_R(u) - \tilde{\Gamma}_R(4m^2) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

(eq. 45.2)

Como havíamos previsto (pg 27), o elemento de matriz agora depende de (s, t, u) e esta dependência: (1) vem da parte finita de Γ ; (2) acontece em relação ao ponto de referência $\{s_0, t_0, u_0\} = \{4m^2, 0, 0\}$. Basta substituir $\{s, t, u\}$ por $\{4m^2, 0, 0\}$ para obtermos a condição de renormalização:

$$\mathcal{M}(4m^2, 0, 0) = -\lambda$$

Esta dependência é uma previsão da teoria que pode ser checada experimentalmente, ou seja, conseguimos extrair uma dependência física que estava escondida somada a uma parte divergente e não física (não observável).

Podemos também obter os contratermos para a função de dois pontos. Note que a função obtida no loop não depende de p^2 :

$$(23.1) \Rightarrow -i M^2(p^2) = \text{---} \otimes \text{---} + \overbrace{\text{---} \circlearrowleft \text{---}}^{-i M_{\text{loop}}^2} =$$

$$= i(p^2 \delta Z - \delta m^2) - \frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 L_N \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \right]$$

Portanto:

$$(24.2b) \Rightarrow \delta Z = \left. \frac{d}{dp^2} M_{\text{loop}}^2(p^2) \right|_{p^2=m^2} \Rightarrow \boxed{\delta Z = 0} \quad (\text{eq. 46.1})$$

$$(24.1b) \Rightarrow \left[p^2 \delta Z - \delta m^2 = M_{\text{loop}}^2(p^2) \right]_{p^2=m^2}$$

$$\boxed{\delta m^2 = \frac{-\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 L_N \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \right]} \quad (\text{eq. 46.2})$$

O que deixa $Z = 1$ mesmo a um loop, e fixa a massa física. Note que esta **independência de p^2** é uma **peculiaridade de $\lambda\phi^4$ a 1-loop**. Por isso sequer nos demos ao trabalho de expandir $M^2(p^2)$ em série de Taylor para separar a parte finita da parte divergente (como fizemos para Γ na página 34), todas as derivadas dariam zero e a série seria trivial. Isso não será assim tão simples para outras teorias (de fato, mesmo $\lambda\phi^4$ a 2-loops já fica mais complicada).

Regularização Dimensional (em $\lambda\phi^4$)

(Peskin 7.5, Cheng & Li 2.3, Nastase 33.4, Schwartz B.3)

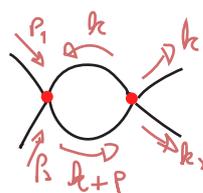
A regularização de Pauli-Villars pode se tornar bastante complicada (em teorias envolvendo férmions, por exemplo), portanto vamos aproveitar que temos os resultados para $\lambda\phi^4$ e explorar uma outra regularização, chamada de **Regularização Dimensional**, cujos resultados poderemos comparar com os resultados acima, obtidos via Pauli-Villars.

Simplificando ao extremo, podemos voltar à pg 31 (aquela do meme) e perceber que, além de aumentar a potência do momento no denominador (o que fizemos com Pauli-Villars), também poderíamos ter regularizado diminuindo a potência do momento no numerador. No entanto, nos loops que calculamos até agora*, as potências de momento no numerador vinham da medida de integração d^4k , portanto teríamos que diminuir a dimensão do espaço.

(* há casos em que os próprios propagadores vêm com momento no numerador, mas reduzindo as potências que vem da medida de integração resolvemos todos os casos.

Em alguns sistemas esta diminuição pode ter interpretação física (como por exemplo em alguns sistemas de matéria condensada em que toda dinâmica se confina a uma superfície ou linha, reduzindo de verdade a dimensionalidade do problema para 1 ou 2 dimensões) mas não é disso que estamos tratando. O que queremos é realmente uma extensão analítica das funções que estamos calculando, passando a tratar o número de dimensões d como uma variável e estendendo o domínio nesta variável de números inteiros para reais. A principal desvantagem deste método é a interpretação física (não está claro que com isso estamos alterando só o limite UV da teoria, por exemplo), mas ele também não quebra a invariância translacional (além de outras simetrias, que veremos adiante) e a vantagem prática é enorme (contas muito mais fáceis) e por isso ele é o mais usado.

Começemos com um exemplo concreto, a função de 4-pontos em 33.2:



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \sim \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} [\text{LOG}(\Lambda)]$$

$$= \text{Lim}_{d \rightarrow 4} \mu^{4-d} \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

$d \rightarrow$ regulator, esse é o cara que em algum limite vai tornar a integral divergente de novo.

$\mu \rightarrow$ escala de massa ARBITRÁRIA, cuja função é manter a dimensão da integral igual a que tínhamos em quatro dimensões:

$$\left. \begin{aligned} [d^4 k] &= 4 \quad \rightarrow \quad [d^d k] = d \\ [\mu] &= 1 \end{aligned} \right\} [\mu^{4-d} d^d k] = 4$$

Introduzir este μ é convencional (o Peskin e o Nastase, por exemplo, não o fazem) e uma outra opção seria absorver a dimensão errada da integral na constante de acoplamento da teoria. Basta notar que em d dimensões o requerimento de que a ação seja invariante fixa a dimensão da Lagrangiana e dos campos:

$$\left. \begin{aligned} \left[\int d^d x \mathcal{L} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}] = d \\ \mathcal{L} = \underbrace{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}_{[d\phi]=1} - \underbrace{m^2 \phi^2}_{[m^2]=2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [\phi^2] &= d-2 \\ [\phi] &= \frac{d-2}{2} \end{aligned}$$

Logo: $[\lambda \phi^4] = d \Rightarrow [\lambda] + 4 \left(\frac{d-2}{2} \right) = d \Rightarrow [\lambda] = 4-d$

Ficamos com um acoplamento que não é adimensional (em $d \neq 4$), mas a série da função de quatro pontos continua fazendo sentido:

$$i\Gamma = -i\lambda + (-i\lambda^2) \int d^d k \left(\sim \frac{1}{k^4} \right) +$$

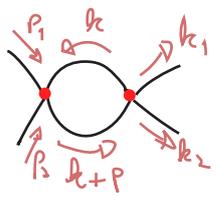
\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $[\lambda] = 4-d$ $\left[\frac{\lambda^2 d^d k}{k^4} \right] = 2(4-d) + d - 4 = 4-d$

Colocar esta escala é equivalente a substituir $\lambda \rightarrow \mu^{4-d} \lambda$ na Lagrangiana, mantendo λ adimensional. Ignorar completamente isso faz com que apareçam um logs de grandezas dimensionais (no Peskin ele corrige a dimensão só no final).

Esta escala é tão arbitrária que podemos (e iremos) inclusive atribuir a ela alguma escala física relevante (ou usá-la como a escala de referência), mas isso não é necessário. **Não confunda** essa escala com alguma escala UV, que temos que mandar para infinito (quem recupera a divergência é $d \rightarrow 4$). Acabamos de introduzir dois parâmetros espúrios (d e μ) dos quais as nossas previsões não podem depender.

Após a regularização, os passos seguintes são os mesmos do caso em que usamos Pauli-Villars:

(1) Parametrização de Feynman:



$$= N^{4-d} \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon')} \frac{i}{[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon']}$$

estou mudando a notação destes caras pois quero usar ϵ para outra coisa

$$= -N^\epsilon \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{\underbrace{[x[(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon'] + (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon')]^2}_D} =$$

$$\boxed{\epsilon \equiv 4-d}$$

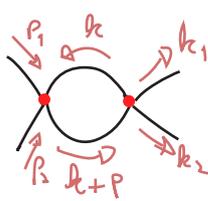
$$D = k^2 + 2k \cdot p x + p^2 x - m^2 + i\epsilon' = l^2 - \Delta^2 + i\epsilon'$$

$$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)p^2$$

$$l_\nu \equiv k_\nu + x p_\nu$$

$$= -N^\epsilon \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 - \Delta^2 + i\epsilon']^2}$$

(2) Wick Rotation (pg 39-40):



$$= -i N^E \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon]^2}$$

Nós ainda podemos escrever isso em coordenadas esféricas, mas agora a integração angular exige uma certa reflexão:

$$\int d^d l_E = \int dl_E l_E^{d-1} d\Omega_d$$

Para estender a definição do ângulo sólido para d real, partimos da integral Gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \pi^{1/2} \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^n = \pi^{n/2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

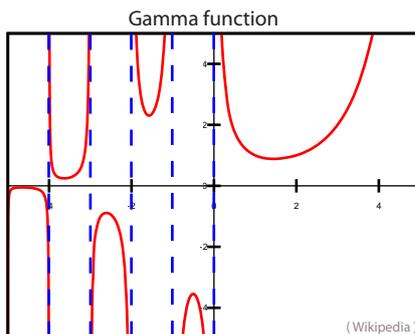
$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x^2} = \int \frac{d\Omega_d}{2} \int_0^\infty dx^2 \underbrace{x^{n-2}}_{(x^2)^{\frac{n-2}{2}}} e^{-x^2}$$

$dx = \frac{dx^2}{2x}$

E aí podemos estender: $n \rightarrow d$ pois a última integral é a definição da função gamma

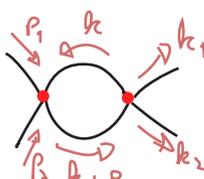
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$$

que é bem comportada em todo plano complexo com exceção de polos simples em zero e inteiros negativos:



Assim:

$$\pi^{d/2} = \int \frac{d\Omega_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{eq. 49.1})$$



$$\begin{aligned}
 &= -i N^\epsilon \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon']^2} \int d\Omega_d = \\
 &= -i N^\epsilon \frac{(-i\lambda)^2}{2} \frac{2 \pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{d l_E^2}{2} \frac{l_E^{d-2}}{[l_E^2 + \Delta^2 - i\epsilon']^2} = \\
 &= -i \frac{(-i\lambda)^2}{2} N^\epsilon \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx \frac{1}{(\Delta^2 - i\epsilon')^{2-d/2}} \\
 &\quad \text{my 40 } (z_1 = d/2, z_2 = 2-d/2, A = \Delta^2 - i\epsilon') \\
 &\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\Delta^2 - i\epsilon')^{2-d/2}} \frac{\Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}
 \end{aligned}$$

A divergência continua aí, se manifestando agora nos pontos em que a função gamma é singular:

$$\Gamma(z) \rightarrow \text{polos em: } z = 0, -1, -2, -3, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon = \gamma - d & \\
 \epsilon = 0, -2, -4, -6, \dots & \\
 d = 4, 6, 8, 10, \dots &
 \end{aligned}$$

então claramente em $d = 4$ temos uma estrutura não trivial. Note que $\text{Lim}[d \rightarrow 4_-] = \text{Lim}[\epsilon \rightarrow 0_+]$ e que perto deste ponto temos as expansões:

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \underbrace{\gamma}_{\text{Constante de Euler-Mascheroni (0,577...)}} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

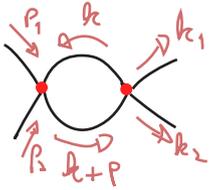
$$\left(\frac{1}{\Delta^2 - i\epsilon'} \right)^{\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \underbrace{\text{Ln}[\Delta^2 - i\epsilon']}_{\text{Ln}(\Delta^2) - i\epsilon''} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$N^\epsilon = (N^2)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \text{Ln}[N^2] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} = (4\pi)^{-d/2} = \frac{1}{16\pi^2} + \frac{\epsilon}{32\pi^2} \text{Ln}[4\pi] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{N^2}{\Delta^2 - i\epsilon} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + i\epsilon'' - \underbrace{L_N(\Delta^2) + L_N(N^2) + L_N(4\pi\mu) + U(\epsilon)}_{-L_N\left(\frac{\Delta^2}{N^2}\right)} \right\}$$

(note que se não tivéssemos o μ aí, ficaria um Log de Δ^2 , que tem dimensão de energia ao quadrado. E também que seria fácil absorver o 4π na definição de μ .)



$$= -i \frac{(-i\lambda)^2}{2} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N\left(\frac{\Delta^2}{N^2}\right) + N \right] =$$

$N \equiv L_N(4\pi\mu) - \gamma_E$

Que deixa clara uma divergência quando tomamos, agora podemos separar a parte finita da divergente usando as definições da eq. 35.1 (onde usamos a série de Taylor):

$$i\Gamma_0(p^2) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N\left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{N^2}\right) + N \right] \quad (\text{eq. 51.1})$$

$$i\Gamma_0(0) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N\left(\frac{m^2}{N^2}\right) + N \right] = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N\left(\frac{m^2}{N^2}\right) + N \right] \quad (\text{eq. 51.2})$$

Que podemos comparar diretamente com o resultado obtido via Pauli-Villars:

$$(43.1) \Rightarrow i\Gamma_{\ell}^{\text{P.V.}}(0) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} L_N\left[\frac{\Lambda^2}{m^2}\right]$$

e notar que **eles não coincidem**, o que **não é um problema pois esta parte divergente não contribui para observáveis físicos**. Podemos escrever um dicionário entre estas duas regularizações:

$$\frac{2}{\epsilon} + L_N(N^2) + N \iff L_N(\Lambda^2) \quad (\text{eq. 51.2})$$

Já a parte finita da função de 4 pontos:

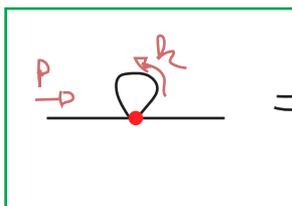
$$i\tilde{\Gamma}(p^2) = i\Gamma(p^2) - i\Gamma(0) =$$

$$= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2 - \kappa(1-x)p^2}{N^2} \right) + N \right] - \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N \right] \right\} =$$

$$= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \underbrace{L_N \left(\frac{m^2 - \kappa(1-x)p^2}{m^2} \right)}_u = \frac{+i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \underbrace{(\kappa-1)}_v \underbrace{\frac{(2x-1)p^2}{m^2 - \kappa(1-x)p^2}}_{du} dx$$

Além de ter eliminado todas as constantes e arbitriedades intrínsecas da regularização dimensional obtivemos **a mesma integral que tínhamos via Pauli-Villars (eq. 40.2)**. Isso tinha que ser assim, pois os observáveis físicos não podem depender do método de regularização, mas é difícil não ficar impressionado.

Seguindo a mesma lógica para a função de dois pontos (**exercício**):



$$= -i \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} =$$

$$= \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) N^{4-d} \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma[1 - d/2]}{(m^2)^{1-d/2}} =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{d \rightarrow 4}{\epsilon} \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{eq. 52.1})$$

No passo intermediário fica claro que há um polo para $d = 4$ ($\Gamma(-1)$) mas agora aparece também um polo em $d=2$ ($\Gamma(0)$). Essa é a única indicação de que este diagrama é divergente quadraticamente, olhando acima a divergência continua sendo da forma $1/\epsilon$, exatamente como no caso da função de quatro pontos. Isso se deve ao fato de que todos os polos de Γ divergem como polos simples ($1/\epsilon$) e mostra que a Reg. Dim. não é o lugar apropriado para olhar se estamos interessados em saber quão sensíveis são os loops da teoria a este cut-off UV.

De fato, o dicionário aqui seria (caso estejamos interessados na parte mais divergente):

$$\Rightarrow \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \Lambda^2 \Leftrightarrow \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N \right] \quad (44.1)$$

$$-\Lambda^2 \Leftrightarrow m^2 \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N' \right]$$

Que é diferente da função de 4 pontos. Por outro lado, se comparado com a divergência logarítmica:

$$(44.1) \Rightarrow + \frac{i \lambda m^2}{32\pi^2} L_N \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \Leftrightarrow \frac{i \lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N' \right]$$

$$L_N(\Lambda^2) \Leftrightarrow \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N(N^2) + N' \right]$$

que, a menos da constante N' (que poderia ser absorvida em μ de qualquer forma) é o mesmo que foi obtido para a função de 4 pontos (eq. 51.2). Isso indica que o polo que estamos encontrando aqui realmente é a divergência logarítmica (e que a divergência quadrática foi regularizada para zero). Argumentos mais sólidos nesta direção podem ser encontrados em *Gaumé & Vázquez-Mozo, An Invitation to Quantum Field Theory, Lectures Notes in Physics 839 (2012), chapt 12.2*.

Podemos então aplicar as condições de renormalização (como nas páginas 45 e 46) e escrever os contratermos calculados com Reg. Dim.:

$$\{s_0, t_0, u_0\} = \{4m^2, 0, 0\}$$

$$\delta\lambda = \Gamma_R(4m^2) + 3\Gamma_R(0) \stackrel{(41.1)}{=} \stackrel{(51.2)}{=} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[(2 + i\pi) + 3 \left(\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N' \right) \right] \quad (\text{eq. 53.1})$$

(continuamos com $\delta z = 0$, aqui nada muda)

$$\delta m = -M_{\text{loop}}^2 = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - L_N \left(\frac{m^2}{N^2} \right) + N' \right] \quad N' = 1 - \gamma_E + \text{Log}(4\pi) \quad (\text{eq. 53.2})$$

E claramente nada muda na discussão do que acontece com o elemento da matriz S , uma vez que estes só dependem da parte finita da função de 4 pontos (que é exatamente a mesma).

A duas regularizações aqui apresentadas não são as únicas, muitas outras estão disponíveis (veja Nastase 31 e 33 e Schwartz 15 e apêndice B). O importante é que a regularização escolhida ("boa") não quebre alguma simetria importante da teoria, e então regularizações "boas" devem concordar em todos os observáveis (que foi o que aconteceu entre P.V. e Reg. Dim. no nosso exemplo).

Além disso a parametrização da divergência deve ser tal que é possível absorver os infinitos com uma redefinição das constantes da teoria, o que em termos de Lagrangiana é equivalente a dizer que eu consigo escrever os contratermos e estes são operadores hermitianos e locais, caso contrário a Lagrangiana escrita em termos das constantes "físicas" não faria sentido.

No que segue usaremos quase sempre a Reg. Dim. porque algebricamente é muito vantajoso, e preserva a simetria de Gauge (abeliana e ã-abeliana, P.V. viola esta última). O calcanhar de Aquiles da Reg. Dim. é a matriz γ_5 , que não generaliza para qualquer dimensão, atacaremos este problema se aparecer algum observável em que γ_5 tem papel importante.

Contagem de Potências e Renormalizabilidade

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 a 9.5, Nastase 32.3, Weinberg 12.1)

Até agora, focamos em reescrever nossa teoria ($\lambda\phi^4$) em termos de grandezas físicas e mostramos que isso, além de fazer sentido em si só, também removeu divergências das funções de 2 pontos e de 4 pontos. O que não sabemos é o quão geral ou definitivo isto é, ou seja:

- * Será que aparecem divergências novas em outras funções (de mais pontos)?
- * Será que aparecem mais divergências se eu calcular mais loops para estas mesmas funções?
- * Será que em qualquer teoria (além de $\lambda\phi^4$) eu consigo eliminar divergências? Se sim, será com estas mesmas três redefinições (campo, massa e acoplamento)? Se não, quantas redefinições serão necessárias?

Uma outra forma de colocar estas questões seria: como é que eu sei que não estou olhando para um ciclo infinito de redefinições, em que cada vez que for calcular uma nova quantidade eu encontro novas divergências e sou forçado a fazer novas redefinições e recalculer tudo de novo?

Para responder isso temos que olhar o processo de renormalização de uma forma mais geral, mas comecemos com $\lambda\phi^n$:

Contagem de Divergências Ultravioleta - $\lambda\phi^n$

Aqui generalizamos apenas um pouco a nossa interação (não estou usando m_0 ou λ_0 agora pois não vamos redefinir estas constantes no que segue, e a forma da Lagrangiana deixa claro que são "nuas"):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad \begin{array}{l} \text{(EM } d \text{ DIMENSÕES)} \\ n \geq 3 \end{array}$$

Para qualquer diagrama nesta teoria, podemos definir:

$$\begin{array}{ll} N = \text{número de linhas externas} & V = \text{número de vértices} \\ P = \text{número de propagadores} & L = \text{número de loops} \end{array}$$

Estamos interessados em olhar aquela contagem mais inocente de potências que pode aparecer quando integramos os loops, e ver se o diagrama diverge no UV:

$$\int^{\Lambda} d^d k_E \frac{k_E^n}{k_E^m} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ \text{finito} \end{array} \right.$$

Há uma divergência em potencial para cada loop (cada momento indeterminado): $\int d^d k$

E em uma teoria escalar, isso é atenuado pelos propagadores: $\frac{1}{k^2 - m^2}$

Em um diagrama com vários loops temos diversos momentos independentes, imagine que estamos olhando a região em que todos estes momentos (e todas as componentes de cada um deles) estão indo para infinito juntos (faz mais sentido pensar isso no Euclidiano, obviamente):

$$\forall_N \quad k_1^N \sim k_2^N \sim k_3^N \sim k \rightarrow \infty$$

$$q_i = \sum \cancel{p_j} + \sum k_l \sim k \Rightarrow (q_i^2 + m^2) \sim k^2$$

momentos externos finitos

momento no propagador

$$\int d^d k_1 \dots d^d k_L \left(\frac{1}{q_1^2 + m^2} \right) \dots \left(\frac{1}{q_P^2 + m^2} \right) \approx \int d^{LD} k \frac{1}{k^{2P}} = \int d^d k k^{LD - 2P - 1}$$

número de integrais em momento (ou loops) número de propagadores

Isso nos motiva a definir a **Divergência Superficial** do diagrama:

$D \equiv dL - 2P$

(eq. 55.1)

de tal forma que:

$\int d^d k k^{D-1} \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^D \\ L_N(\Lambda) \\ \frac{1}{\Lambda^{-D}} \end{array} \right.$	$D > 0$	}	Integral Diverge
	$D = 0$		Integral Diverge
	$D < 0$		Integral Converge

Esta análise simplista (que se aplica bem a uma integral) pode falhar no caso de diagramas por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem $D = 0$, mas são convergentes.
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L=2$
 $P=4$

$D = dL - 2P = 0 \Rightarrow$

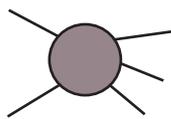
$d=4$
 $L_N(\Lambda \rightarrow \infty)$

"superficialmente"

mas a integral no "loop pequeno" é completamente independente do resto e diverge mais fortemente:

$\rightarrow \int d^4 k_1 \frac{1}{k_1^2} \sim \Lambda^2$

(3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria a divergência pode ser menor ou nem existir:



$$\sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(C_0 + C_1 L_n(\Lambda) + C_2 \Lambda^2 \right)$$

simetria $\rightarrow C_2 = 0$, e talvez até $C_1 = 0$.

Veremos um exemplo disso mais a frente, pois as identidades de Ward-Takahashi fazem exatamente isso em QED.

Apesar dessas ressalvas, a divergência superficial é bastante útil. Seria bom expressá-la em termos do número de pernas externas do diagrama. Sabemos que o número de momentos não determinados (logo o número de loops) é dado por:

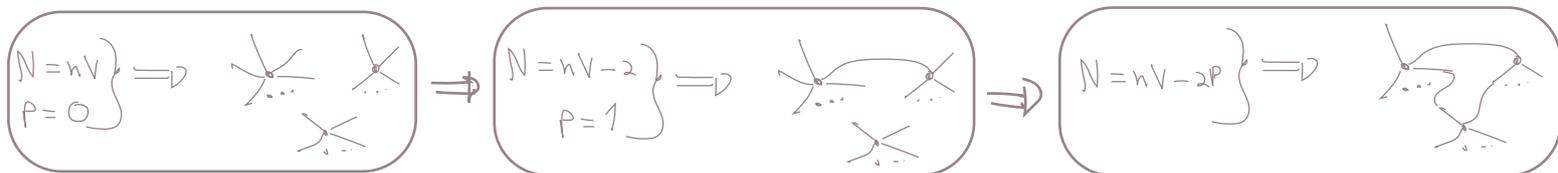
$$L = P - (V - 1) = P - V + 1 \quad (\text{eq. 56.1})$$


 cada vértice introduz uma conservação de momento, mas se formos aplicando estas uma a uma, a última será a conservação de momento total, que não envolve os momentos internos

 cada propagador introduz um momento

Em $\lambda\phi^n$, de cada vértice saem n linhas, como todas as linhas se conectam a vértices (de forma que as linhas externas se conectam a 1 vértice, e as internas se conectam a 2) então temos uma relação entre o número de vértices e de linhas:

$$nV = N + 2P \quad (\text{eq. 56.2})$$



Juntando 56.1 e 56.2 temos:

$$D = dL - 2P = d(P - V + 1) - 2P = d - dV + (d-2) \left(\frac{nV - N}{2} \right) =$$

$$D = d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N = d - \Delta V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N \quad (\text{eq. 56.3})$$

$-\Delta_n$

$$\Delta_n \equiv d - n \left(\frac{d-2}{2} \right) \quad (\text{eq. 56.4})$$

Note que o Δ_n acima é uma propriedade da teoria (da interação e da dimensão do espaço-tempo) e não de um diagrama em particular. Ele fixa um comportamento importante da teoria (por enquanto **tomemos $d > 2$**):

($\Delta_n > 0$) A divergência diminui se eu aumento o número de vértices! As pernas externas também diminuem a divergência. Isso quer dizer que apenas uns poucos diagramas podem ser divergentes, quando eu aumento o número de loops vou acabar encontrando apenas diagramas finitos. Chamamos estas teorias de **Super-Renormalizáveis!**

($\Delta_n = 0$) Se eu mantenho o número de pernas externas fixo, tenho divergência para um número arbitrariamente alto de vértices, logo de loops. Há infinitos diagramas divergentes na teoria. No entanto aumentar as pernas externas melhora a situação, o que quer dizer que apenas funções de poucos pontos tem divergências e as funções de mais pontos da teoria serão finitas. Chamamos estas teorias de **Renormalizáveis!**

Note que até aqui **temos esperança de repetir o processo de renormalização por contratermos**, uma vez que cada condição de renormalização resolve o problema de uma função de n -pontos Γ^n , e **existe um número finito de Γ^n divergentes** (se n ficar grande elas são finitas). Logo consigo renormalizar a teoria com um **número finito de condições/redefinições**.

($\Delta_n < 0$) Agora todas as Γ^n são divergentes! Mesmo que eu pegue um n arbitrariamente alto, vai haver algum diagrama em ordem alta da expansão perturbativa com número grande o suficiente de vértices para que a divergência apareça. Estas teorias são chamadas de **Não-Renormalizáveis**, pois eu precisaria de um número infinito de redefinições (ou condições, ou contratermos, como você preferir) para definir a teoria em termos de grandezas observáveis.

CUIDADO: isso não quer dizer que teorias não renormalizáveis são inúteis! Em muitas situações é possível "truncar" essa série infinita de redefinições e estimar o erro cometido pela não inclusão dos infinitos contratermos "faltantes". Se esse erro é menor que o erro experimental você tem uma teoria que efetivamente só depende de uma quantidade finita de constantes físicas e é preditiva. Exemplos famosos são a Teoria de Perturbação Quiral ou a interação de Fermi. Veremos quais são as condições que viabilizam isso mais adiante.

Em suma:

Super-Renormalizável $\leftarrow \rightarrow$ número **finito de diagramas** divergentes (logo, também de Γ^n)

Renormalizável $\leftarrow \rightarrow$ número **infinito de diagramas** divergentes, mas eles contribuem para um número **finito de Γ^n** divergentes.

Não-Renormalizável $\leftarrow \rightarrow$ número **infinito de Γ^n** divergentes.

Assim, $\lambda\phi^n$ será renormalizável dependendo do número de dimensões e da potência n :

$$(56.4) \Rightarrow \Delta_n = d - n \left(\frac{d-2}{2} \right)$$

$$d > 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_n < 0 \iff n > \frac{2d}{d-2} \quad \text{Não-Renormalizável} \\ \Delta_n = 0 \iff n = \frac{2d}{d-2} \quad \text{Renormalizável} \\ \Delta_n > 0 \iff n < \frac{2d}{d-2} \quad \text{Super-Renormalizável} \end{array} \right.$$

$d \leq 2$ ($d = 2$ ou $d = 1$), a teoria é super-renormalizável independente de n (exercício)

Ex:

$$\frac{2d}{d-2} = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \phi^4 \quad \text{renormalizável} \\ \lambda \phi^6 \quad \text{não-renormalizável} \end{array} \right. \quad d=4$$

$$\frac{2d}{d-2} = 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \phi^4 \quad \text{super-renormalizável} \\ \lambda \phi^6 \quad \text{renormalizável} \end{array} \right. \quad d=3$$

Outra forma de chegar a 56.3 é analisando a dimensão da Lagrangiana. Como já comentamos antes, em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$$\text{Dim}[S] = 0 \quad \text{GeV}^0$$

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{\text{Dim}[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + \text{Dim}[\mathcal{L}] = 0 \quad \therefore \boxed{\text{Dim}[\mathcal{L}] = d}$$

Voltando a Lagrangiana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim}\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \phi)^2\right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 58.1})$$

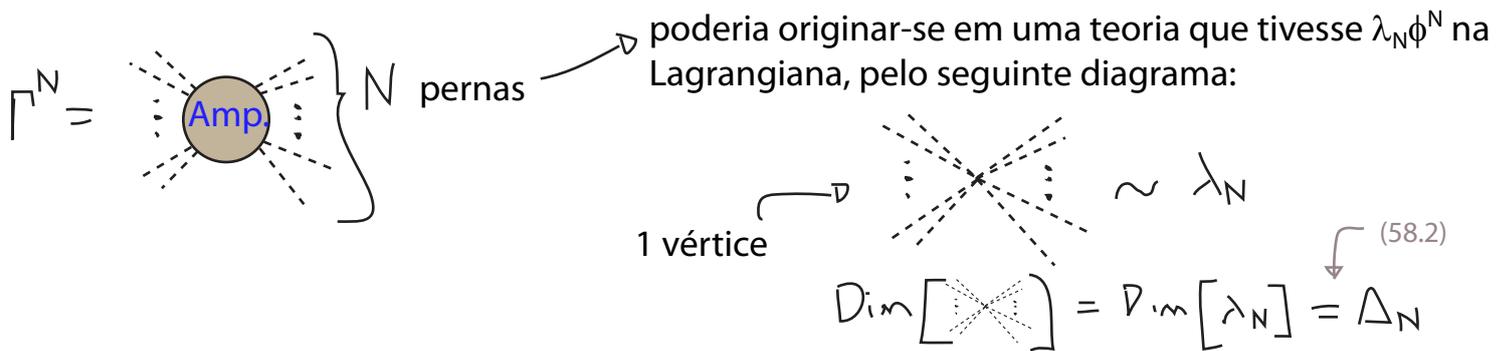
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim}\left[\frac{\lambda_n}{n!} \phi^n\right] = d = \text{Dim}[\lambda_n] + n \text{Dim}[\phi] \quad (56.4)$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda_n] = d - \frac{n(d-2)}{2}} = \Delta_n \quad (\text{eq. 58.2})$$

Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\text{Dim} \left[\text{Diagram} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2} \quad (\text{eq. 59.1})$$

Mas em nossa teoria, ele pode ser gerado por meio do vértice $\lambda_n \phi^n$:



$$\text{Dim} \left[\text{Diagram} \right] = \text{Dim} [\lambda_n^V \Lambda^D] \quad (\text{eq. 59.2})$$

Igualando 59.1 e 59.2:

$\text{Dim} [\Lambda] = 1$
(cut-off de momento)

$$\text{Dim} [\lambda_n^V \Lambda^D] = d - \frac{N(d-2)}{2} \Rightarrow V \underbrace{\text{Dim} [\lambda_n]}_{\Delta_n} + D = d - \frac{N(d-2)}{2}$$

$$D = d - \Delta_n V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N \quad (\text{que é o mesmo obtido em 56.3 considerando a topologia dos diagramas})$$

(eq. 59.3)

De forma que podemos reescrever a critério de renormalizabilidade em termos da dimensão do acoplamento:

$\text{Dim} [\lambda_n] < 0$ Não-Renormalizável

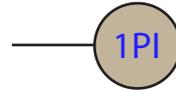
$\text{Dim} [\lambda_n] = 0$ Renormalizável

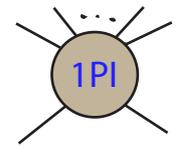
$\text{Dim} [\lambda_n] > 0$ Super-Renormalizável

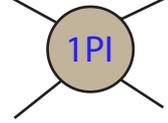
Nós podemos agora ver se já conseguimos dar conta de todas as divergências em $\lambda\phi^4$. Esta teoria tem uma simetria discreta sobre a transformação $\phi \rightarrow -\phi$, que proíbe todas as função de n-pontos para n ímpar, então de cara podemos esquecer estas pois serão todas zero. Comecemos com Γ^0 :

$$\lambda\phi^4 \left. \vphantom{\lambda\phi^4} \right\} \Delta_4 = 4 - 4\binom{4-2}{2} = 0 \Rightarrow D = 4 - N \quad (\text{só depende do número de pernas})$$

Γ^0  $\Rightarrow D = 4$ (divergente mas não nos interessa, são bolhas no vácuo que não contribuem para nenhum observável)

Γ^2  $\Rightarrow D = 2$

$\Gamma^{N \geq 6}$  $\Rightarrow D < 0$

Γ^4  $\Rightarrow D = 0$

Logo as únicas divergências relevantes estão em Γ^2 e Γ^4 (estas divergências claramente **ainda podem aparecer** dentro de $\Gamma^{N \geq 6}$ **como subdiagramas**, e ainda não mostramos que o processo que usamos para resolver os problemas em G2 e G4 resolve isto, mas o faremos em breve). Podemos ver como estas divergências estão nestas duas funções fazendo uma série de Taylor em p^2 (o momento total entrando no diagrama), assim como fizemos na pg 35:

$$\Gamma^N = \underbrace{A_0}_{D=2} + \underbrace{A_1 p^2}_{D=2} + \underbrace{A_2 p^4}_{D=0} + \dots$$

cada derivada em p^2 diminui o grau de divergência em 2, uma vez que:

$$\frac{d}{dp^2} \left(\frac{1}{\underbrace{\Lambda^2}_{\text{este é o momento integrado}} + \Delta(p^2) - i\epsilon} \right) \sim \frac{\Delta'(p^2) \overset{\text{finito}}{\uparrow}}{\underbrace{[\Lambda^2 + \Delta(p^2) - i\epsilon]^2}_{\leftarrow}}$$

Portanto o termo A_0 é sempre o mais divergente, temos:

$$\underbrace{\Gamma^2}_{D=2} = \underbrace{A_{2,0}}_{D=2} + \underbrace{A_{2,1} p^2}_{D=0} + (\text{Finitos}) \sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Finitos})$$

$$\underbrace{\Gamma^4}_{D=0} = \underbrace{A_{4,0}}_{D=0} + (\text{Finitos}) \sim L_N(\Lambda) + (\text{Finitos})$$

Que é exatamente o que encontramos anteriormente:

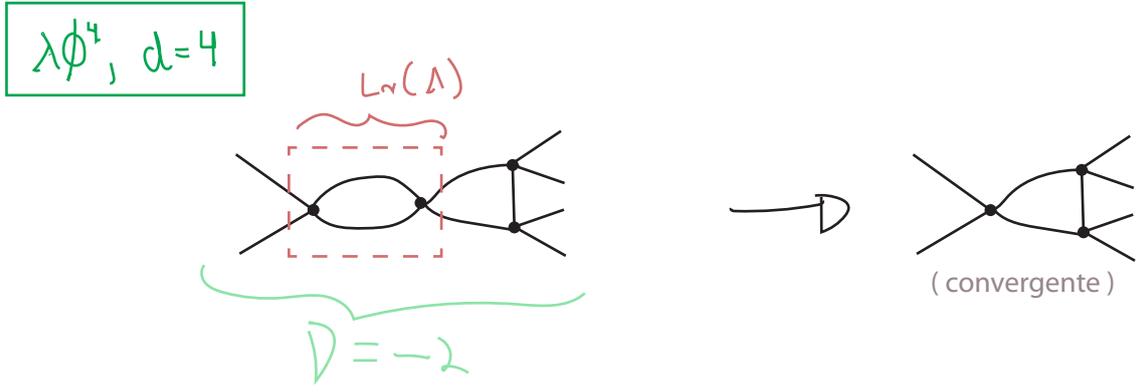
(Γ^4) A série em p^2 para Γ^4 está em 35.1, e as expressões analíticas para os dois termos estão em 41.1 (termo finito), 43.1 (termo divergente obtido em P.V.) e 51.2 (termo divergente obtido em Dim. Reg.).

(Γ^2) A expansão de Taylor é trivial, pois a 1-loop Γ^2 não depende do momento, portanto todas as divergências (e termos finitos) vêm de $A_{2,0}$. Tanto os termos divergentes como os finitos estão em 44.1 (P.V.) e 52.1 (Dim. Reg.)

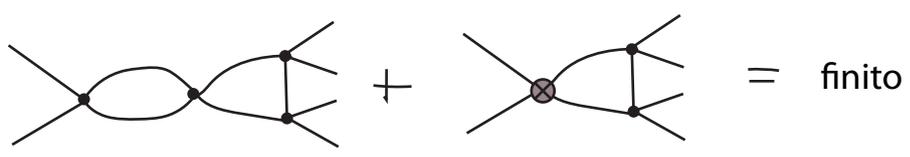
Renormalização a dois loops e subdiagramas

(Peskin 10.4, Ryder 9.7, Cheng & Li 2.2)

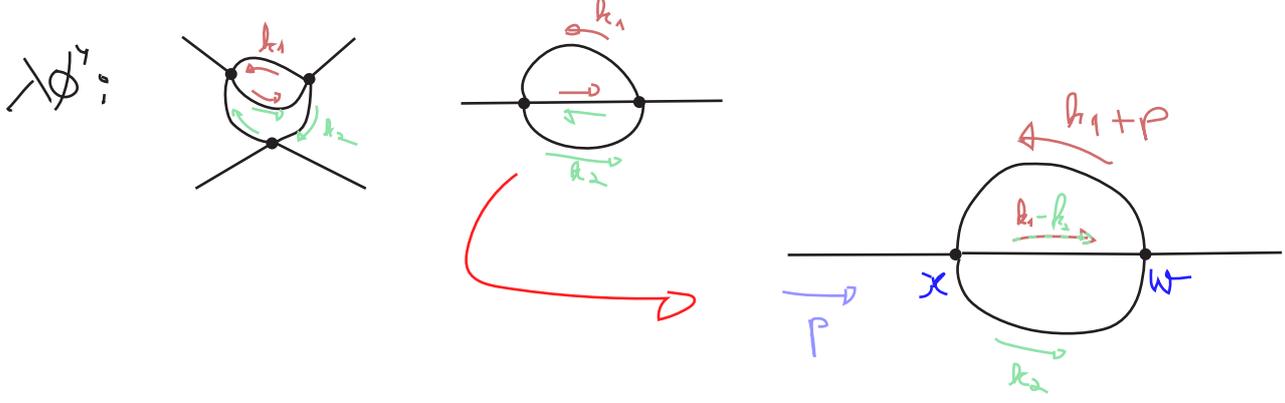
Ainda usando $\lambda\phi^4$ como exemplo, vamos discutir um pouco o que aconteceria a mais loops ou em diagramas com mais pernas externas. Uma das coisas mais simples que pode acontecer é o aparecimento de subdiagramas que são essencialmente os loops divergentes de 4 ou 2 pontos dentro de diagramas mais complicados (que são superficialmente convergentes). Isso quer dizer que se tirarmos o "subdiagrama problema" dali o diagrama converge:



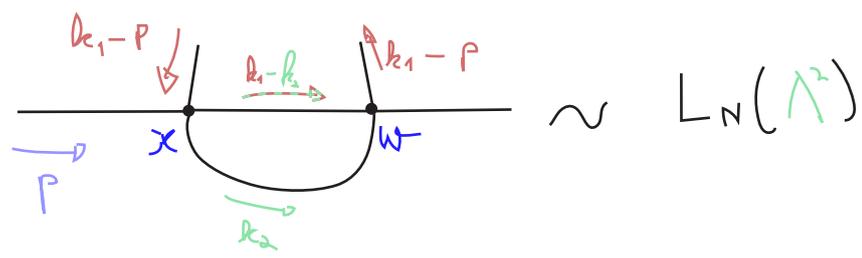
neste caso não há divergência associadas aos momentos fora do loop na caixa acima, e nada muda em seu cálculo. A divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência da função de quatro pontos (sem que nenhuma condição nova seja imposta):



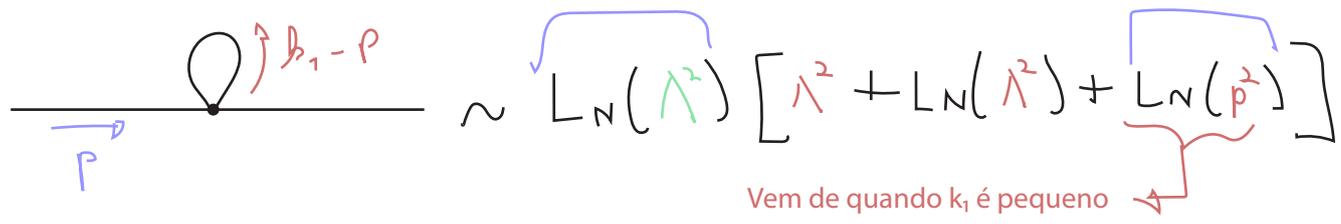
A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (nested ou overlapping em inglês)



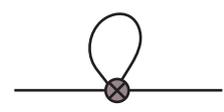
Pensemos primeiro na região em que só k_2 é grande, podemos esquecer o loop em k_1 e pensar no loop inferior como a correção da função de quatro pontos:



Isso é equivalente a levar os pontos x e w muito próximo um do outro e ter um diagrama com esta divergência logarítmica multiplicando:



O que sugere que estas divergências são removidas pelos contratermos em diagramas do tipo:

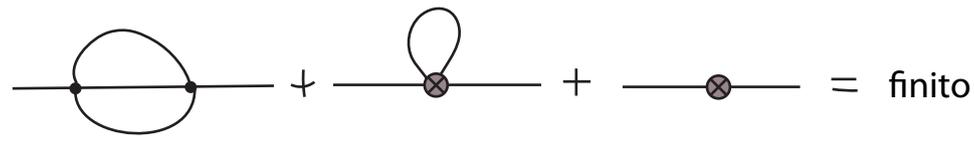


Estes termos proporcionais a $L_N(p^2) L_N(\lambda^2)$ vão contra nossa expectativa de que as divergências aparecem multiplicando simples polinômios em p^2 . Chamamos as divergências que de fato multiplicam polinômios em p^2 de **divergências locais**, essas divergências que não multiplicam polinômios são chamadas de **divergências não locais**. Se fizéssemos a conta veríamos que de fato as divergências locais são removidas pelo diagrama acima.

Uma vez removidas, resta apenas uma divergência local que vem de quando k_1 e k_2 vão juntos para infinito. Esta é cancelada, como de costume, pelo diagrama:



Logo:



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que coloquemos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como **teorema BPHZ** (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann), e o esquema de renormalização que vimos até agora (que consiste em reescrever a Lagrangiana com contratermos) é muitas vezes chamado de **Renormalização BPHZ** (no **esquema on-shell**, uma vez que nossas condições de renormalização forçaram o polo do propagador completo a ser a massa física da partícula)

Contagem de Divergências Ultravioleta - Spin 0, 1/2 e 1

(Weinberg 12.1, Nastase 32.3 e 32.4)

Queremos agora generalizar a contagem de potências que fizemos nas pgs 54 a 56 para teorias que tenham interações quaisquer envolvendo campos de spin 0, 1/2 ou 1. Definimos:

N_f = número de linhas externas do campo "f"

P_f = número de propagadores do campo "f"

V_i = número de vértices da interação "i"

Cada interação da teoria será caracterizada por um conjunto de números:

Interação "i" $\left\{ \begin{array}{l} n_{i,f} = \text{número de linhas do campo "f" que saem do vértice da interação "i"} \\ d_i = \text{número de derivadas agindo nos campos no vértice da interação "i"} \end{array} \right.$

e como agora estamos aceitando que podem haver diversas interações no mesmo modelo (Lagrangiana) usaremos a classificação anterior (renormalizável, super-renorm., não-renorm.) para cada interação, de forma que a teoria como um todo pode ter setores renormalizáveis, misturados com setores não-renormalizáveis.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_I = -ie(\partial_\mu \phi^*) A_\mu \phi - \frac{\lambda}{2!} (\phi^\dagger)^2 \\ i = \{e, \lambda\} \quad f = \{\phi, \phi^*\} \\ e \begin{cases} n_{e\phi} = 2 \\ n_{e\phi^*} = 1 \\ d_e = 1 \end{cases} \quad \lambda \begin{cases} n_{\lambda\phi} = 4 \\ n_{\lambda\phi^*} = 0 \\ d_\lambda = 0 \end{cases} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathcal{L}_I = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ i = \{e\} \quad f = \{\psi, \bar{\psi}\} \\ e \begin{cases} n_{e\psi} = 2 \\ n_{e\bar{\psi}} = 1 \\ d_e = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ainda queremos introduzir a divergência superficial como fizemos na pg 55, e a potência que os loops inserem no numerador continua sendo dL (d = dimensão do espaço tempo, L = número de integrais de momento, ou loops), mas os propagadores agora dependem do spin da partícula. No limite de alto momento os propagadores se comportam como:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{k^2} \text{ BÓSONS} \\ \frac{k}{k^2} \text{ FÉRMIONS} \end{array} \right\} \frac{1}{k^{2-2s_f}} \quad \Rightarrow \quad s_f \equiv \begin{cases} 0 & \text{BÓSONS} \\ 1/2 & \text{FÉRMIONS} \end{cases}$$

De forma que a potência total vinda dos propagadores é: $\sum_f P_f (2s_f - 2)$

Além disso, cada derivada insere uma potência de momento no vértice, então temos que somar esta contribuição:

$$\sum_i V_i d_i$$

A divergência superficial pode então ser escrita como:

$$D \equiv dL + \sum_f P_f (2S_f - 2) + \sum_i V_i d_i \quad (\text{eq. 64.1})$$

(cheque que se reduz à 55.1 para $\lambda\phi^n$)

A equação 56.1 continua verdadeira em essência (uma vez que só envolve conservação de momento) mas temos que somar sobre as interações "i" e os campos "f":

$$L = 1 + \sum_f P_f - \sum_i V_i \quad (\text{eq. 64.2})$$

$$D = d + \sum_f dP_f - d \sum_i V_i + \sum_f P_f (2S_f - 2) + \sum_i V_i d_i =$$

$$D = d + \sum_f P_f (2S_f - 2 + d) + \sum_i V_i (d_i - d)$$

Resta obter o equivalente à eq. 56.2. A proporção entre propagadores e linhas externas no lado direito de 56.2 continua a mesma (cada vez que adiciono um propagador, tiro duas linhas externas, e vice-versa), mas o número de linhas saindo do vértice é diferente para cada campo e depende da interação. Temos que somar sobre todos os vértices que podem produzir um dado campo:

$$\forall f \Rightarrow \sum_i n_{if} V_i = N_f + 2P_f \quad (\text{eq. 64.3})$$

$$P_f = \frac{1}{2} \left(\sum_i n_{if} V_i - N_f \right)$$

$$D = d + \frac{1}{2} \sum_f \left(\sum_i n_{if} V_i - N_f \right) (2S_f - 2 + d) + \sum_i V_i (d_i - d) =$$

$$D = d - \sum_i \Delta_i V_i - \sum_f \left(S_f + \frac{d-2}{2} \right) N_f \quad (\text{eq. 64.4})$$

(cheque que se reduz à 56.3 para $\lambda\phi^n$)

$$\forall i \quad \Delta_i \equiv \left[d - d_i - \sum_f n_{if} \left(S_f + \frac{d-2}{2} \right) \right] \quad (\text{eq. 65.1})$$

O Δ de novo guarda as informações da(s) interação(ões) da teoria, incluindo agora informação sobre o spin e possíveis derivadas, e controla o que acontece com a divergência superficial quando vamos mais longe na expansão perturbativa (aumentando o número de vértices).

Exemplos:

QED
 $d=4$
 $n_{e\psi} = 2$
 $n_{e\phi} = 1$
 $d_e = 0$

$e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ $i = \{e\}$ $f = \{\psi, \gamma\}$

$S_\psi = \frac{1}{2}$
 $S_\gamma = 0$

$$\Rightarrow \Delta_e = 4 - 0 - 2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - 1(0 + 1) = 0 \quad (\text{eq. 65.2})$$

YUKAWA
 $d=4$
 $n_{y\psi} = 2$
 $n_{y\phi} = 1$
 $d_y = 0$

$y \bar{\psi} \psi \phi$ $i = \{y\}$ $f = \{\psi, \phi\}$

$S_\psi = \frac{1}{2}$
 $S_\phi = 0$

$$\Rightarrow \Delta_y = 0 \quad (\text{eq. 65.3})$$

FERMI
 $d=4$

$G_F (\bar{\psi} \Gamma \psi) (\bar{\psi} \Gamma \psi)$ ▷ alguma combinação de matrizes de dirac, com índice contraídos

$n_{F\psi} = 4; d_F = 0; S_\psi = \frac{1}{2}$

$$\Delta_F = -2 \quad (\text{eq. 65.4})$$

Olhando 64.4, vemos que para teorias com $\Delta_i \geq 0$, temos um D máximo (obtido com um pequeno número de pernas) e que só decresce quando aumentamos o número de vértices, e as interações deste tipo são classificadas como **renormalizáveis** ($\Delta_i = 0$) ou **super-renormalizáveis** ($\Delta_i > 0$) por todas as mesmas razões que vimos anteriormente. Se um dado modelo tem $\Delta_i \geq 0$ para todas as suas interações dizemos que o modelo é renormalizável. A QED e a interação de Yukawa são renormalizáveis.

Caso $\Delta_i < 0$ teremos novamente todas as Γ^n que envolvem aquela interação divergindo, levando a uma interação **não-renormalizável**, basta uma interação desta no modelo para dizermos que ele é não-renormalizável. A interação de Fermi não é renormalizável.

Usando análise dimensional nos termos cinéticos de campos fermiônicos e vetoriais, vemos que:

$$\text{Dim}[\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi] = 2 \text{Dim}[\Psi] + 1 = d$$

$$\hookrightarrow \boxed{\text{Dim}[\Psi] = \frac{d-1}{2} = s_f + \frac{d-1}{2}}$$

$$\text{Dim}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = \text{Dim}[d_\mu A_\nu d_\nu A_\mu] = 2 \text{Dim}[A_\mu] + 2 = d$$

$$\hookrightarrow \boxed{\text{Dim}[A_\mu] = \frac{d-2}{2} = s_f + \frac{d-2}{2}}$$

e portanto basta lembrar que qualquer interação aparece na Lagrangiana como um operador (que é um produto dos campos na teoria) multiplicado por um acoplamento:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_i g_i \hat{\mathcal{O}}_i$$

↘ acoplamento

para obter, em termos das propriedades já definidas para as interações, as dimensões do operador e do acoplamento:

$$\text{Dim}[\mathcal{O}_i] = \underbrace{\text{Dim}[\text{DERIVADAS}]}_{d_i} + \sum_p \text{Dim}[\underbrace{\phi^{n_{ip}}}_{\text{campo do tipo "f"}}] = d_i + \sum_p n_{ip} \left(s_f + \frac{d-2}{2} \right)$$

$$\text{Dim}[g_i \mathcal{O}_i] = d$$

$$\boxed{\text{Dim}[g_i] = d - \text{Dim}[\mathcal{O}_i] = \Delta_i} \quad (\text{eq. 66.1})$$

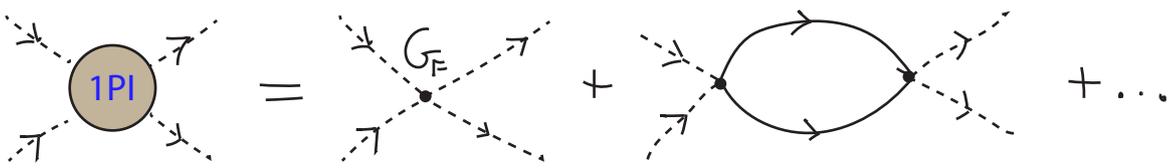
Percebe-se que o resultado obtido para teorias escalares é geral, e Δ_i é mesmo a dimensão do acoplamento. Esta equação deixa também bastante fácil decidir se uma interação é renormalizável ou não, pois vemos que basta comparar a dimensão do operador que introduz a interação com a dimensão do espaço tempo.

Comentário sobre teorias não renormalizáveis

Para ter uma ideia do que aconteceria se tentássemos usar contratermos para uma teoria não renormalizável, vejamos o que ocorre com a interação de Fermi ($d = 4$):

$$\mathcal{L}_1 = G_F (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi)$$

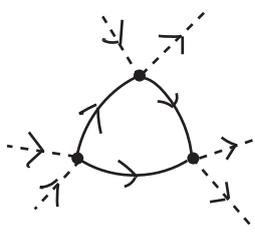
A função de 4 pontos em NLO, contém loops do tipo:



E tudo indica que poderíamos redefinir G_F e aparecer com o contratermo abaixo para renormalizar esta interação:

$$\delta G_F (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi)$$

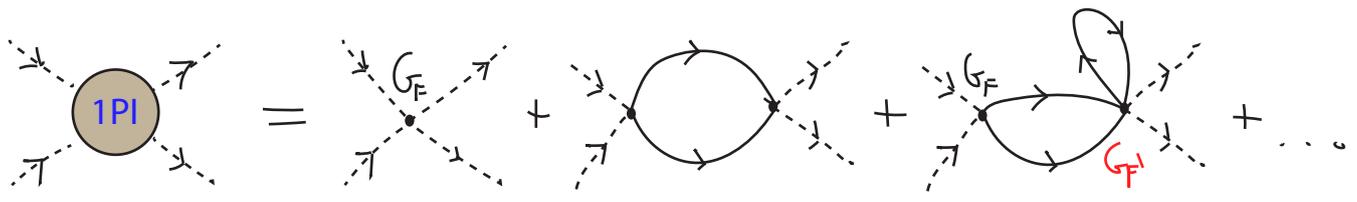
O problema é que a função de 6 pontos também é divergente, e quando calculamos o diagrama abaixo:



temos uma nova divergência. O único tipo de termo na Lagrangiana que pode eliminar esta divergência é um contratermo de uma interação com 6 férmions, que podemos introduzir:

$$G_{F1}^0 (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) \rightarrow (G_{F1} + \delta G_{F1}) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma \Psi)$$

e com uma nova condição de renormalização resolvemos este novo problema, mas o custo é introduzir uma nova interação na teoria (G_{F1}). O grande problema vem do fato de que **esta nova interação também contribui para minha função inicial**, de quatro pontos:



o que quer dizer que **precisamos das condições de renormalização para a função de 6-férmions** para calcular a função de 4-pontos. Não é difícil perceber que o problema é sério, pois é muito fácil agora escrever um diagrama com 8-pontos e mostrar que este também tem uma nova divergência, necessita de uma nova condição e vai criar uma interação de 8 férmions que contribui em praticamente todas as funções com menos de 8 pontos. É uma torre infinita de problemas, que em princípio precisaria de uma **quantidade infinita de parâmetros** (e portanto **medida experimentais**) para ser resolvida.

Existe uma situação em que estas teorias são preditivas no entanto, e um pouco de análise dimensional nos permite identificá-la. Primeiro note a dimensão destes acoplamentos vai se tornando mais negativa (conforme a dimensão do operador aumenta em 3, a cada passo):

$$G_F \equiv G_F^{(4)}, \quad G_{F1} \equiv G_F^{(6)}, \quad G_F^{(8)}, \quad \dots$$

$$\text{Dim} [G_F^{(4)}] = -2, \quad \text{Dim} [G_F^{(6)}] = -5, \quad \text{Dim} [G_F^{(8)}] = -8, \quad \dots$$

e isso introduz uma (ou várias) escala(s) na teoria, que posso parametrizar da seguinte forma:

$$G_F^{(4)} = g_4 M^{-2} \quad G_F^{(6)} = g_6 M^{-5} \quad G_F^{(8)} = g_8 M^{-8}$$

$$\text{Dim}[M] = 1 \quad \text{Dim}[g_n] = 0$$

(note que usei o mesmo M para todas as interações, mas isso não é importante para nossa análise, elas poderiam ser todas diferentes. O que importa no que assumirei a seguir é que estas escalas estejam todas bem acima das energias do experimento e por isso posso assumir todas iguais sem prejuízo algum)

No entanto o elemento de matriz de um espalhamento com quatro partículas tem dimensão zero (em $d=4$, basta voltar no LSZ e fazer análise dimensional para ver isso):

$$\text{Dim}[M] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dim}[|M|^2] = 0$$

Uma vez que eu tome o módulo da amplitude ao quadrado, a dimensão de G_F vai ser compensada pela a única outra grandeza dimensional disponível, uma combinação dos momentos externos (vamos assumir que os 4 são da mesma ordem e chamar de p):

$$|M(2 \rightarrow 2)|^2 \sim g_1^2 \frac{p^4}{M^4} + \dots + g_6^2 \frac{p^{10}}{M^{10}} + \dots + g_8^2 \frac{p^{16}}{M^{16}}$$

(o mesmo vale para funções de mais pontos, quanto maior o n em g_n , maior vai ser a potência de M no denominador)

Fica claro que **se as escalas típicas do meu experimento** (aqui representadas por p) **forem pequenas quando comparadas com esta escala M** , intrínseca à teoria, então a contribuição desses operadores de dimensão superior vai desaparecer dentro do erro experimental. Talvez eu precise de um ou dois operadores não-renormalizáveis (os de dimensão mais baixa), mas é isso, o resto é suprimido.

Esta foi exatamente a situação encontrada quando se usou a interação de Fermi para descrever os decaimentos fracos, ou no uso de teoria de perturbação quiral para descrever interações hadrônicas.

Em um primeiro momento parece que tivemos uma enorme sorte de que a natureza foi bondosa em escolher que todas as interações que encontramos em altas energias são **(a) renormalizáveis** ou **(b) não-renormalizáveis com alguma escala alta deste tipo**, suprimindo a torre de infinitas contribuições de dimensão superior. Veremos que não é o caso, e que esta situação é de fato esperada uma vez que entendamos o papel destes operadores e o significado físico desta escala, faremos isso adiante quando estudarmos a renormalização "Wilsoniana".



Identidades de Ward-Takahashi

(Ryder 7.4, Nastase 23.4, Peskin 7.4, Schwartz 14.8.3)

Nosso próximo objetivo é usar a contagem de potências que acabamos de explorar para determinar como faremos a renormalização da QED. No entanto, diferentemente de $\lambda\phi^4$, na QED as simetrias desempenharão um papel importante em eliminar divergências e introduzir relações entre contra-termos. Por isso vamos ver primeiro a encarnação em Teoria de Campos da simetria de Gauge.

É muito comum que os conceitos de **Invariância de Gauge**, **Conservação de Corrente** e **Identidades de Ward** (e sua generalização, W-T) sejam usados como sinônimos por aí, uma vez que estão todos fortemente conectados. Eu gosto da distinção que o Peskin faz no último parágrafo da seção 7.4, onde ele chama de Invariância de Gauge uma propriedade da Lagrangiana:

Invariância de Gauge

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\nu\sigma} F^{\nu\sigma} + i \bar{\Psi} (\not{\partial} + i e \not{A}) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$$

de novo estou suprimindo estes "0" que indicam campos e constantes não renormalizadas, volto com eles quando for falar de contra-termos

$$\begin{aligned} A_\nu(x) &\rightarrow A_\nu(x) + \partial_\nu \alpha(x) \\ \Psi(x) &\rightarrow \Psi(x) - i e \alpha(x) \Psi(x) \end{aligned}$$

(eq. 69.1)

$$(\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} + i e \alpha \bar{\Psi})$$

é o mesmo que:
 $\Psi(x) = e^{-i e \alpha(x)} \Psi(x)$
 $A_\nu(x) = A_\nu(x) - \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(x)$ basta fazer: $\alpha(x) \leftrightarrow -e \alpha(x)$

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}_{QED}$$

Em uma teoria clássica, como a simetria global é também satisfeita, e o Teorema de Neother garante a Conservação da Corrente (que é uma equação de movimento):

Conservação da Corrente

$$\delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (\text{eq. 69.2})$$

$$j^\nu(x) \equiv \bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x) \quad (\text{eq. 69.3})$$

Em TQC I (pg 187-189 das notas de 2022, ou no YouTube video 27) mostramos que, se a teoria não for anômala (ou seja, a simetria continua boa na teoria quântica) a **simetria global** implica em uma versão generalizada da Identidade de Ward:

Identidade de Ward

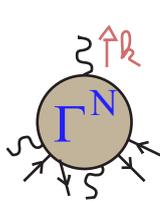
$$\langle \partial^\nu j_\nu \rangle = 0 \quad (\text{eq. 69.4})$$

(não falamos em campos I, mas em NLO isso também depende da nossa regularização não estragar a simetria, o que tomaremos como condição necessária para a escolha da regularização)

Que pode ser facilmente transformada em restrições sobre funções de n-pontos da teoria, impondo a simetria sobre estas e portanto sobre as amplitudes quânticas da teoria. Como exemplo podemos partir de 69.4 e provar a identidade de Ward ("Ward mesmo", sem generalização).

(Peskin 5.5)

Basta lembrar que para um diagrama qualquer envolvendo um fóton externo, eu posso escrever:



"separei" a contribuição deste fóton

$$\Gamma^N = i M(k) \equiv i M^\nu(k) \epsilon_\nu^*(k)$$

mas sabemos que este o índice μ do fóton tem que estar contraído com um termo da forma:

$$\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) = j^\mu(x)$$

dentro de M^ν . Portanto podemos escrever:

$$M^\nu(k) = \int d^4x e^{ikx} \langle \downarrow | j^\nu(x) | \uparrow \rangle$$

todos os estados "antes" e "depois" da aplicação de j

Agora podemos usar 69.4 para escrever:

$$\int d^4x e^{ikx} \langle \underbrace{\partial_\nu j^\nu(x)}_0 \rangle = 0 = - \int d^4x \overbrace{(k_\nu e^{ikx})}^{k_\nu e^{ikx}} \langle j^\nu \rangle$$

↳ integrando por partes, e assumindo que a corrente vai a zero no infinito

$$k_\nu \int d^4x e^{ikx} \langle j^\nu \rangle = 0$$

$$\boxed{k_\nu M^\nu(k) = 0} \quad (\text{eq. 70.1})$$

(que coloca uma restrição direta em todas as funções de N pontos da teoria que tenham fótons externos)

Vamos deduzir agora uma versão ainda mais poderosa, as chamadas **identidades de Ward-Takahashi**, que além de ser consequência da **simetria local**, também se aplicam a quaisquer diagramas (o fóton não tem que ser externo).

Lembre-se que, ao quantizar a QED, introduzimos um termo de Gauge-Fixing:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 70.2})$$

e para definir um funcional gerador (de onde obtemos todas as funções de Green) temos que introduzir fontes:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{EFF}} + \mathcal{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Tanto o termo de G.F. quanto as fontes parecem quebrar a invariância de Gauge. No entanto sabemos que: (i) a fixação de Gauge aparece no método de Fadeev-Popov como uma simples redefinição da integral de trajetória (não muda a integral) e; (2) que a invariância de Gauge não pode ser quebrada na ausência de fontes externas físicas (e aqui estamos pensando nestas fontes como artifício para o cálculo, se fossem físicas eu teria que especificar como estas se transformam sobre a transformação local). Portanto sobre a transformação local, devemos ter:

$$\delta Z[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta] = 0$$

(note que isso não é uma condição adicional que devemos impor sobre a teoria, isso deveria ser satisfeito automaticamente e funciona como um teste de consistência da teoria. De fato tanto o Peskin, quanto Itzykson-Zuber, sec 8.4.1, provam W.T. sem qualquer menção à Lagrangiana, usando apenas a conservação da corrente.)

Quase toda a Lagrangiana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes:}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta &\rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\mathcal{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes:}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta \\ \underbrace{\mathcal{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} & \end{aligned}$$

$$\int d^4x \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \alpha = - \int d^4x (\partial_\mu \mathcal{J}^\mu) \alpha(x)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} \rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi \text{Exp} \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \mathcal{J}^\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS} \end{aligned}$$

↗ aqui está a variação de Z

Considerando que $\alpha(x)$ é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ i \int d^4x \underbrace{\left[-\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu J^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\hat{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar \hat{O} é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu} \quad \boxed{Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{eff}} + i \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}}$$

Então:

$$\hat{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left(1 + i \int d^4x \alpha(x) \hat{O} \right) Z$$

Para garantir a invariância de Z , qualquer que seja α , precisamos que: $\hat{O} Z = \overset{\text{ZERO!}}{\circ} Z$

$$\left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Como vimos em TQC I (pg 182 das notas), podemos obter o gerador das funções 1PI, fazendo a transformada de Legendre de W , neste caso com três variáveis:

$$\Gamma[\psi_\mu, \bar{\psi}_\mu, A_\mu^\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \psi_\mu + \bar{\psi}_\mu \eta + J^\mu A_\mu^\mu)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \qquad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}_\mu} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta} \qquad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \qquad \frac{\delta W}{\delta \eta} = -\bar{\psi}_a$$

* parece errado no Ryder

* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\mu A_\mu^a + \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} - i e \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou **W-T Generalizada**

(eq. 73.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 73.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left[\delta(x-y) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \left[\delta(x-x_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos: $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

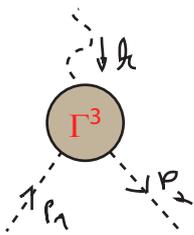
$$\partial_x^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = +i e \left(-\delta(x-y_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y_1) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x)}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{[S_F^c(x-x_1)]^{-1}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{[S_F^c(y_1-x)]^{-1}}$

$$\partial_x^\mu \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 73.2)

Queremos escrever isso no espaço dos momentos, usando a seguinte convenção para os momentos, obtemos a transformada de Fourier



$$\Rightarrow \int d^4x d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 y_1} e^{-ip_2 x_1} e^{ikx}$$

lembrando que é convencional escrever a função de 3 pontos da QED com a carga multiplicando explicitamente definimos (veja pg 25):

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) \left[-i e \Gamma_{ijN}^{\text{QED}(3)}(p_1, p_2; k) \right] \equiv \\ \equiv \int d^4x d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 y_1} e^{-ip_2 x_1} e^{ikx} \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1; x)$$

cheque por análise dimensional de 73.2 que, removendo explicitamente esta conservação de momento, acabamos com uma função de três pontos adimensional, de acordo com o que definimos na pg 25

O lado esquerdo de 73.2 fica:

$$\int d^4x d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 y_1} e^{-ip_2 x_1} e^{ikx} d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1; x) \stackrel{\text{PARTES}}{=} \\ = -i k^N \int d^4x d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 y_1} e^{-ip_2 x_1} e^{ikx} \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1; x) = \\ = -(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) e k^N \Gamma_{ijN}^{\text{QED}(3)}(p_1, p_2; k)$$

e o lado direito de 73.2 fica:

$$\int d^4x d^4y_1 d^4x_1 e^{ip_1 y_1} e^{-ip_2 x_1} e^{ikx} \left\{ i e \delta^4(x-x_1) [S_F^C(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^C(x-x_1)]^{-1} \right\} = \\ = i e \left\{ (2\pi)^4 \delta(k+p_1-p_2) [S_F^C(p_1)]^{-1} - (2\pi)^4 \delta(p_1+k-p_2) [S_F^C(p_2)]^{-1} \right\} =$$

\downarrow
 $p_1 + k$

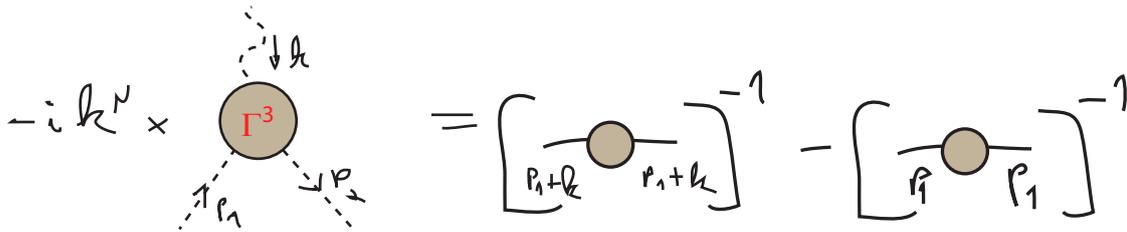
logo, igualando os dois lados:

$$-k^\nu \Gamma_{ijN}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = i \left\{ \left[\sum_F^c(p_1) \right]^{-1} - \left[\sum_F^c(p_1+k) \right]^{-1} \right\}$$

$$-i k^\nu \Gamma_{ijN}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[\sum_F^c(p_1+k) \right]^{-1} - \left[\sum_F^c(p_1) \right]^{-1} \quad (\text{eq. 75.1})$$

Identidade de Ward-Takahashi
(propriamente dita)

Que, em diagramas, fica:



A partir da equação 73.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Renormalização da QED

Contagem de potência e definição dos contratermos

(Peskin 10.1 a 10.5, Ryder 9.5 a 9.7, Schwartz 21)

Vamos usar os resultados das pgs 63 a 66 para repetir a análise que fizemos para $\lambda\phi^4$ (na pg 60) e determinar quantas divergências independentes temos na QED. Da equação 65.2 temos que:

(65.2) $\Rightarrow \Delta_{QED} = \bigcirc$ (eq. 75.2)

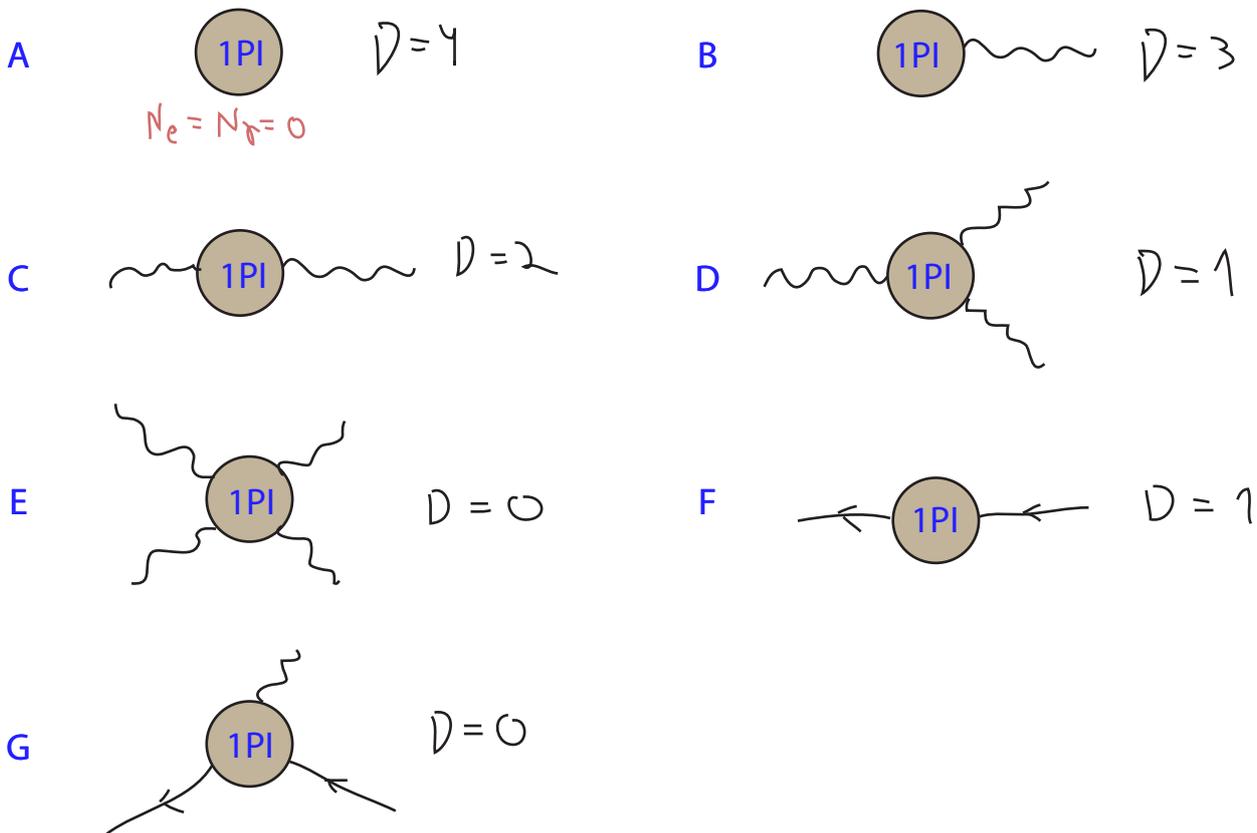
e portanto:

(64.4) $\Rightarrow D = d - \sum_i \Delta_i V_i - \sum_f \left(S_f + \frac{d-2}{2} \right) N_f = 4 - \sum_f (S_f + 1) N_f =$

$P = \{e, \gamma\}; S_e = 1/2; S_\gamma = 0$

$$D = 4 - \frac{3}{2} N_e - N_\gamma \quad (\text{eq. 75.3})$$

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem $D \geq 0$. Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:



O diagrama **A** é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Nas funções 1PI com fótons (**B**, **C**, **D** e **E**) estamos amputando estes propagadores externos, mas ainda vale que para cada um deles deve haver um vértice onde age:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Por isso a situação é parecida com o que fizemos na página 70, mas como não há linhas externas, os estados "antes" e "depois" são o vácuo. Tome como exemplo a função **B**:

$$\text{1PI} \rightarrow k = -ie \int d^4x e^{-iqx} \langle \Omega | T \{ j_\mu(x) \} | \Omega \rangle$$

Esse operador deve ter um valor esperado no vácuo igual a zero pois senão **quebramos** a invariância de **Lorentz** (isso é uma quebra espontânea de simetria que não observamos na QED, esse valor esperado de j_μ definiria uma direção preferencial no vácuo) e a **conjugação de carga**, que é mais fácil de ver:

$$C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle \quad (\text{QED é invariante por conjugação de carga})$$

$$\text{e temos: } C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{notas de TQC I (2022) pg 159})$$

$$\text{então: } \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = -\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de p = 0 fica:

$$\left[\text{Diagrama F} \right] \equiv -i \sum (\not{p}) = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots \quad (\text{eq. 77.1})$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left(\text{Diagrama F} \right) \Big|_{p=0}$$

(se você já ouviu falar de **divergências infravermelhas**, pode estar preocupado agora. O fato é que muitas teorias com partículas sem massa - nesse caso o fóton - tem divergências para momentos pequenos. A QED é uma delas. Então os coeficientes A_n tem duas divergências independentes, uma para momentos grandes (UV) e outra para pequenos (IR). Aqui estamos interessados no UV e resolveremos a divergência IR mais adiante. Obviamente obter uma expressão explícita para os A_n exige que cuidemos de ambas)

Sabemos que estas derivadas em p diminuem o grau de divergência do coeficiente, como agora estamos agindo em um propagador fermiônico, a divergência diminui em 1:

$$\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{k} + \not{p} - m)^2}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de A_0 (que é a maior) deve ser $D = 1$, isto quer dizer que a divergência de A_1 é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (como antes, esse argumento ignora os subdiagramas). No entanto, há uma simetria que entra em ação aqui, a **simetria quiral**. Lembremos (TQC I - pgs 125 a 127) que a massa de um férmion é dada na Lagrangiana por:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\psi} \psi = \frac{m_0}{2} (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$$

$$\bar{\psi} \not{\partial} \psi = \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R + \bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L$$

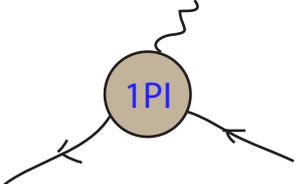
↳ se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangiana que "acople" ψ_L e ψ_R . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$\delta m \sim m_0$ (note que isso quer dizer que um férmion de massa zero nunca ganharia massa)

Como as correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua), a correção independente do momento (A_0) deve ser proporcional a massa nua. Por análise dimensional vemos então que, apesar de ter $D = 1$, esta contribuição não pode depender linearmente de Λ , tendo uma divergência logarítmica. Temos, portanto, o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\left[\text{Diagrama F} \right] = a_0 m_0 L_\nu(\Lambda) + a_1 \not{p} L_\nu(\Lambda) + (\text{Termos Finitos}) \quad (\text{eq. 77.2})$$

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama **G**, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente A_0 :

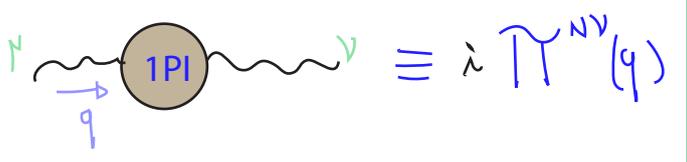


$$\equiv -\lambda e \Gamma^N(p, p) \sim \Gamma^N L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

↳ some Dirac matrix (or combination of...)

(eq. 78.1)

A auto-energia do fóton (diagrama **C**) também é influenciada por simetrias da QED. Se definirmos:



$$\equiv \lambda \tilde{\Pi}^{N\nu}(q)$$

(eq. 78.2)

a estrutura mais geral que podemos escrever para este tensor é:

$$\tilde{\Pi}^{N\nu}(q) = \underbrace{\tilde{\Pi}_A(q^2)}_{\text{funções arbitrárias}} g^{N\nu} + \underbrace{\tilde{\Pi}_B(q^2)}_{\text{funções arbitrárias}} q^N q^\nu$$

No entanto, as identidades de Ward nos dizem que (exercício da aula anterior):

$$q_\mu \tilde{\Pi}^{N\mu}(q) = 0$$

$$q_\mu \tilde{\Pi}^{N\mu}(q) = \tilde{\Pi}_A(q^2) q^\nu + \tilde{\Pi}_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

$$\tilde{\Pi}_A(q^2) = -\tilde{\Pi}_B(q^2) q^2 \equiv \tilde{\Pi}(q^2) q^2$$

$$\tilde{\Pi}^{N\nu}(q) = (q^2 g^{N\nu} - q^N q^\nu) \tilde{\Pi}(q^2)$$

(eq. 78.3)

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de $\tilde{\Pi}(q^2)$ temos os coeficientes A_n , $n = 2, 3, \dots$. Os coeficientes A_0 e A_1 são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de $\tilde{\Pi}(q^2)$ que não dependem do momento (os termos de $\tilde{\Pi}(q^2)$ que dependem de q são finitos).

$$\tilde{\Pi}(q^2) \sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(eq. 78.4)

Observação importante:

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de “massas protegidas” por simetrias. Veremos logo que a forma acima para a auto-energia do fóton impede que ele ganhe massa (que já era zero a nível árvore por conta da simetria de gauge) a qualquer ordem de perturbação. O mesmo acontece com um férmion sem massa (que tem uma simetria maior que no caso com massa). O impressionante é que este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente!** A simetria quiral impediria o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas ela está quebrada pelo fato de que o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward, de novo):

$$k^\mu \left(\text{Diagrama E} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com $n < 4$ devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a $D = -4$.

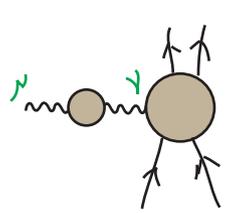
O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita.

Uma consequência interessante de 78.3 (a forma imposta à auto-energia do fóton pelas identidades de WT) pode ser obtida calculando o propagador completo do fóton (no Gauge de Feynman, para simplificar):

$$\begin{aligned} \text{Diagrama completo} &= \text{Diagrama árvore} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \dots \\ &= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \left[i (q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots = \\ &= \left(\frac{q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_{\nu}^{\rho} - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_{\nu}^{\rho} \Pi(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu &= \left(\delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left(\delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q_\nu q^\nu q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu \\ &= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma}_{\Delta_\nu^\rho} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots = \\ &= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \left[\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] = \\ &= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \end{aligned}$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



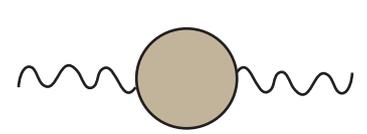
$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot M^\nu(q)$$

em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{q} + \not{q} - m} (-i e \not{\epsilon}) \frac{i}{\not{q} - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que: $q_\nu M^\nu(q) = 0$

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:



$$= \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}$$

(eq. 80.1)

As contribuições para $\Pi(q^2)$ são dadas por estados ligados ou livres de muitos elétrons/pósitrons, e sabemos que não há estados de massa zero neste espectro (o único estado de massa zero é o próprio fóton, que não contribui para $\Pi(q^2)$). Isso quer dizer que $\Pi(q^2)$ é regular em $q^2 = 0$ e o propagador completo continua tendo o polo em $q^2 = 0$! Ou seja, a massa do fóton não é modificada por correções radiativas (em nenhuma ordem de perturbação!) É possível mostrar que se usássemos uma forma errada para $\Pi_{\mu\nu}$ (aqui "errado" quer dizer "viola WT") obteríamos um fóton massivo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i \underbrace{M^2}_{\text{alguma escala de massa}} g^{\mu\nu} \longrightarrow \text{wavy line with mass} = -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - M^2} \quad \text{(Exercício)}$$

Note quão restritivas são as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge). Além de garantir que o fóton é sem massa a nível árvore, "protegem" sua massa de correções a um ou mais loops.

Agora podemos fazer a renormalização por contratermos da QED. Começamos com a Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

Os propagadores completos serão dados por:

$$\text{Electron Propagator} \equiv \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$$

$$\text{Photon Propagator} \equiv -\frac{i Z_3 g^{\mu\nu}}{q^2} + \dots$$

Estamos definindo a massa física do elétron e dando nome aos resíduos nos polos de 1 elétron (Z_2) e 1 fóton (Z_3). Note que não precisamos nos preocupar com a massa do fóton e que a eq. 80.1 nos permite ver que:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \tilde{\Pi}(0)}$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 81.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_R^\mu \quad (\text{eq. 81.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_R^{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

E definimos a carga física:

$$e Z_1 \equiv e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \quad (\text{eq. 81.3})$$

Veremos mais adiante que este Z_1 é um fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando $q = 0$, por isso é conveniente definir a carga desta forma. Para a massa usaremos:

$$\delta_m \equiv Z_2 m_0 - m \quad (\text{eq. 81.4})$$

Fazendo então as definições adicionais:

$$\left. \begin{aligned} \delta_3 &\equiv Z_3 - 1 \\ \delta_2 &\equiv Z_2 - 1 \\ \delta_1 &\equiv Z_1 - 1 \equiv \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{eq. 81.5})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_R^{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} =$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{\mu} +$$

$$-\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \delta_2 \not{\partial} - \delta m) \Psi_R - \delta_1 e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{\mu}$$

(eq. 82.1)

deve ficar clara a conveniência de introduzir Z_1 e sua conexão com a renormalização da função de 3 pontos

cujas regras de Feynman são:

$$= \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \longrightarrow = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$= -i e \gamma^\mu$$

$$= i(\not{p} \delta_2 - \delta m)$$

$$= -i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3$$

$$= -i e \gamma^\mu \delta_1$$

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$= i \Pi^{\mu\nu}(q) = i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

$$= -i \Sigma(\not{p})$$

$$= -i e \Gamma^\mu(p, p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos

A definição de Γ agora é feita com a carga física

Como discutido na página 79, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro δ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 83.1)

$$\sum(\not{p}_0) = 0 \quad (a)$$

$$\Pi(q^2=0) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d}{d\not{p}} \sum(\not{p}) \Big|_{\not{p}=\not{p}_0} = 0 \quad (c)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p'_0, p_0) = -ie\gamma^\mu \quad (d)$$

Onde os momentos p_0 e p'_0 são escalas arbitrárias que escolheremos a seguir. No caso da auto energia do fóton a posição do polo é fixa e, portanto, não temos essa escala livre.

Estrutura do vértice da QED

(Peskin 6.2 & 10.3, Schwartz 17 & 19.5.1)

As identidades de Ward-Takahashi ainda não terminaram de nos presentear. Observe que se escrevemos a equação 75.1 para a teoria não renormalizada, temos:

$$-ie\gamma^\mu \Gamma_\mu^{NR}(p, p'; q) = \left[S_F^c(p+q) \right]^{-1} - \left[S_F^c(p) \right]^{-1}$$

Assim como para os propagadores, que tem um fator Z_2 entre a teoria renormalizada e a não-renormalizada, posso definir um fator para a função 1PI de três pontos:

$$\Gamma_\mu^{NR} \equiv Z_1^{-1} \Gamma_\mu^R \quad \text{essa é a função renormalizada, vou omitir este índice}$$

(neste ponto não é óbvio que este é o mesmo Z_1 definido na renormalização, depois mostraremos isso)

Queremos aplicar a condição para o vértice em 83.1(d). Note que esta condição define o que é a carga elétrica e historicamente todas as medidas desta carga foram feitas em experimentos de baixa energia, por isso é costume defini-la para $q^\mu \rightarrow 0$ (fótons com longo comprimento de onda). Assim vamos impor 83.1(d) em $p'^\mu - p_0^\mu = q^\mu = 0$:

$$\Gamma_\mu(q=0) = \gamma_\mu \quad (eq. 83.2)$$

$$\Rightarrow \Gamma_\mu^{NR}(q=0) = Z_1^{-1} \gamma_\mu$$

Os propagadores completos dos férmions são dados por:

$$S_F(p) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots$$

a massa já é a física, só não redefini campos e acomplementos para sumir com os Z's

portanto, colocando as duas linhas fermiônicas on-shell e tomando o limite $q^\mu \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \cancel{p}, \cancel{p} \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -i q^\mu \Gamma_\mu^{NR} \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma_\mu^{NR}(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^\mu} q^\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \cancel{p}$$

$$\Rightarrow [S_F^c(p+q)]^{-1} - [S_F^c(p)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p+q)_\mu - p_\mu + m] = -i Z_2^{-1} \cancel{p}$$

$$-i q^\mu \Gamma_\mu^{NR}(p, p'; q) = [S_F^c(p+q)]^{-1} - [S_F^c(p)]^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \cancel{p}, \cancel{p} \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \\ \Downarrow \\ -i Z_1^{-1} \cancel{p} = -i Z_2^{-1} \cancel{p} \end{array} \quad \text{Em qualquer ordem de perturbação!}$$

$Z_1 = Z_2$

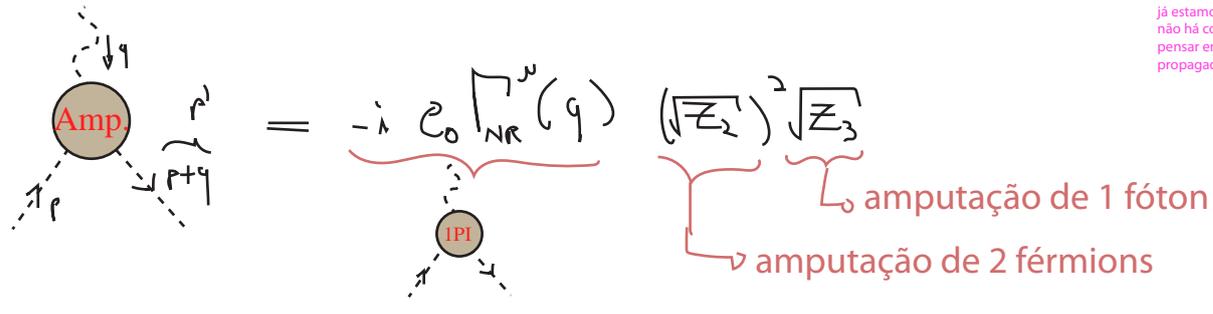
(eq. 84.1)

$\delta_1 = \delta_2$

↪ logo ↪

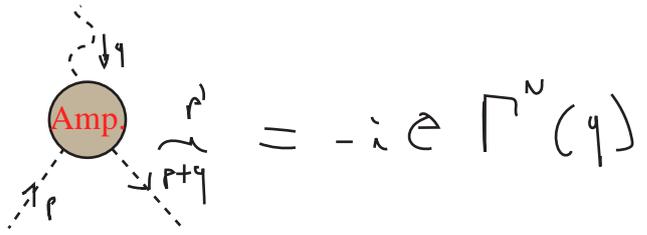
Para ver que este Z_1 é o mesmo que definimos em 81.3, basta lembrar que para elementos da matriz S o que aparece não é a função 1PI, mas sim a função amputada via LSZ, e a diferença entre as duas* são fatores de $Z^{1/2}$ deixados para trás pela LSZ (veja 19.1):

*outra diferença que poderia haver entre a amputada e a 1PI seriam diagramas 1PR contidos dentro da amputada, mas como já estamos falando da função de vértice Γ^1 com apenas 3 pernas, não há como aparecer diagramas 1PR (no caso de Γ^1 , poderíamos pensar em diagramas 1PR formados por dois Γ^1 ligados por um propagador, por exemplo)



(isso também pode ser pensado para um fóton off-shell. Neste caso o propagador do fóton tem um fator Z_3 e estamos absorvendo a raiz de Z_3 em cada ponta do propagador, onde fica o vértice)

Depois de renormalizar os campos, eliminamos estes Z's:



e temos:

$$e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \underbrace{\Gamma_{NR}^\mu(q)}_{Z_1^{-1} \Gamma^\mu(q)} = e \Gamma^\mu(q) \Rightarrow e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = Z_1 e \quad \text{(como definimos em 81.3) //}$$

Uma consequência importantíssima da relação $Z_1 = Z_2$ é que:

$$e_0 \cancel{Z_2} Z_3^{1/2} = \cancel{Z_1} e \Rightarrow \boxed{e = Z_3^{1/2} e_0} \quad (\text{eq. 85.1})$$

ou seja, **as correções à carga elétrica vem unicamente das correções ao propagador do fóton!** Para ver o quanto isso é importante, pense em uma teoria em que temos mais férmions:

$$\left. \begin{array}{l} \text{elétron: } q = -1 \text{ (em unidades de } e) \\ m = m_e \end{array} \right\} \Rightarrow Z_2^e, Z_1^e$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{muon: } q = -1 \\ m \simeq 200 m_e \end{array} \right\} \Rightarrow Z_2^\mu, Z_1^\mu$$

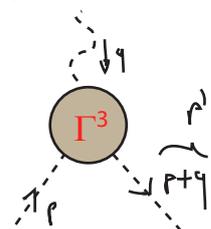
$$\left. \begin{array}{l} \text{quark u: } q = 2/3 \\ m \simeq 4 m_e \end{array} \right\} \Rightarrow Z_2^u, Z_1^u$$

Seria um milagre se os Z_1 e Z_2 destes férmions fossem todos iguais. Tome como exemplo o elétron e o muon. Os diagramas para calcular Z_1 e Z_2 seriam todos os mesmos (os dois tem todas as mesmas interações) mas a massa do muon é muito maior. No caso do quark, além de mudar a carga e a massa, ele tem outras interações (fortes) que vão entrar no seu propagador. Até poderíamos forçar a igualdade em uma escala específica, mas fora desta escala as correções finitas de cada um seriam diferentes. Perdemos a "universalidade de sabor" da interação elétrica. Somos salvos pelo fato de que todos têm carga elétrica proporcional a "e" e interagem com o fóton (que é um só). Assim:

$$e = e_0 \frac{\cancel{Z_2^f} Z_3^{1/2}}{\cancel{Z_1^f}} \quad \forall f = \{e, \mu, u\}$$

As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam as mesmas correções finitas para a carga entre uma energia e outra.

Outra convenção bastante usada para o vértice da QED consiste em expandir a função de 3 pontos:



$$= -i e \Gamma^\mu(q) \quad q_\mu = p'_\mu - p_\mu$$

Que sem perda de generalidade pode ser escrita como:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) C$$

A, B e C poderiam ser funções escalares dos 3 momentos (p^μ , p'^μ e q^μ , contraídos entre si ou com matrizes de Dirac) e da massa. Mas considerando o caso em que o fóton está conectado em um diagrama maior, e os férmions são pernas externas (on-shell), esta função aparecerá sempre contraída com os espinores:

$$iM^\nu = -ie \bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p)$$

e vale:

$$\not{p} u(p) = m u \quad \bar{u}(p') \not{p}' = \bar{u}(p') \cdot m$$

Portanto posso trocar a dependência nos momentos contraídos por dependência na massa ou em q^2 (lembrando que $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$, $q \cdot p = (p' - p) \cdot p$, etc...):

$$A \rightarrow A(q^2) \quad B \rightarrow B(q^2) \quad C \rightarrow C(q^2)$$

Mais uma vez as identidades de Ward reduzem a liberdade:

$$q_\nu M^\nu = 0 \quad (p'_\nu - p_\nu)(p'^\nu + p^\nu) = m^2 - m^2 = 0$$

$$\bar{u}(p') \left[\not{q} \cdot A + \not{q}_\nu (p'^\nu + p^\nu) \cdot B + q^2 C \right] u(p) = 0$$

$\neq 0 (!)$

$$\bar{u}(p') [\not{p}' - \not{p}] u(p) = 0$$

$C(q^2) = 0$

Podemos simplificar a coisa ainda mais usando a **Identidade de Gordon** (exercício):

$$\bar{u}(p') \not{\gamma}^\nu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\nu + p^\nu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\mu}{2m} \right] u(p) \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu]$$

(eq. 86.1)

$$\bar{u} [\not{\gamma}^\nu] u = \bar{u} \left[\not{\gamma}^\nu \cdot A + (p'^\nu + p^\nu) \cdot B \right] u =$$

$\sim \not{\gamma}^\nu - \sigma^{\mu\nu} q_\mu$

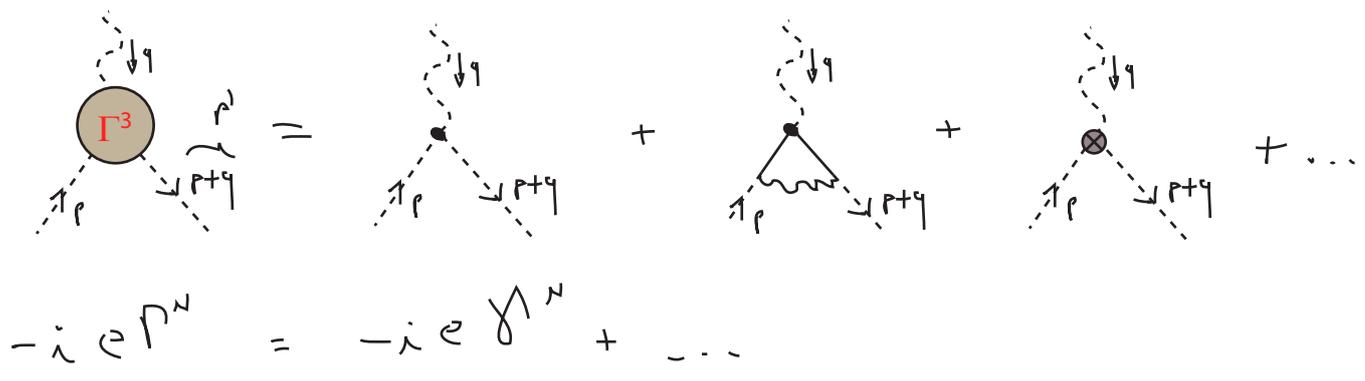
$$= \bar{u} \left[\not{\gamma}^\nu \cdot A' + \sigma^{\mu\nu} q_\mu \cdot B' \right] u$$

E a forma convencionalmente adotada para A' e B' é:

$$\Gamma^N \equiv \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad (\text{eq. 87.1})$$

Fatores de Forma

A expansão perturbativa nos dá informação sobre estes fatores:



L.O. → L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

$$\begin{cases} F_1^{LO}(q^2) = 1 \\ F_2^{LO}(q^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. 87.2}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{F}_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) \\ \bar{F}_2(q^2) = \delta F_2(q^2) \end{cases}$$

e a condição de renormalização implica:

$$-i e \Gamma^N \xrightarrow{q^N=0} -i e \bar{\Gamma}_1(0) \gamma^N$$

(83.2) ⇒ $\Gamma^N(0) = \gamma^N \Leftrightarrow \bar{\Gamma}_1(0) = 1$ (eq. 87.3)

Tanto F₁ quanto F₂ têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático (dado por um campo externo clássico) é dado por:
 (para lembrar como tratamos um potencial externo clássico, ver problema 4.4 do Peskin ou TQC I aula 29)

$$i \mathcal{M}(2\pi)^4 \delta(p'^0 - p^0) = -i e \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) A_\mu^c(p' - p)$$

$$A_\mu^c(x) = (\underbrace{\phi(\vec{x})}_{\text{indep. de } t}, 0, 0, 0) \Rightarrow A_\mu^c(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

$$i \mathcal{M} = -i e \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

Se o campo está variando lentamente em escalas macroscópicas, podemos assumir que $\vec{\phi}(\vec{q})$ tem um pico estreito em $\vec{q} = 0$, e tomamos este limite:

$$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$$

(TQC I pg 200) $2m \sum_s \xi_s^{\dagger} \xi_s = 2m \delta_{ss'}$

$$i\mathcal{M} = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q}) = -ie 2m \tilde{V}(\vec{q})$$

(TQC I pg 201)

Que é a aproximação de Born para o espalhamento por um potencial:

$$V(\vec{x}) = e F_1(0) \phi(\vec{x}) \delta_{ss'}$$

De onde vemos que $F_1(0)$ é a carga do elétron, em unidades de e , e introduzirá mudanças para interação elétrica quando q sair de zero.

Algo semelhante pode ser feito para F_2 e mostrar que ele modifica o momento magnético do elétron. Considere um campo vetorial constante:

$$A_\mu(x) = (0, \vec{A}(\vec{x})) \quad \dots \quad \left\{ \vec{B}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \tilde{B}_k(\vec{q}) = -ie^{ijk} q^j \tilde{A}_j(\vec{q}) \right\}$$

$$i\mathcal{M} = +ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) \tilde{A}_i(\vec{q}) =$$

$$= ie \bar{u}(p') \left[\gamma^i F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{ij} q_j}{2m} F_2(q^2) \right] u(p) \tilde{A}_i(\vec{q})$$

Queremos tomar o limite não relativístico nos espinores, mantendo somente os termos lineares em q (senão dá tudo zero):

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad \sqrt{p \cdot \sigma} = \sqrt{m \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{m} \right)^{1/2}} \simeq \sqrt{m} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right)$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \xi \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \xi \end{pmatrix}$$

$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$
 $\gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m \xi^{\dagger} \left(\frac{p' \cdot \sigma}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{p \cdot \sigma}{2m} \right) \xi$$

$$\left. \begin{aligned} p' \cdot \sigma \sigma^i &= p' \cdot \delta \delta^i + p' \cdot \delta \epsilon^{ijk} \sigma^k \\ p \cdot \sigma \sigma^i &= p \cdot \delta \delta^i + p \cdot \delta \epsilon^{ijk} \sigma^k \end{aligned} \right\} (p'^i + p^i) - i \epsilon^{ijk} \sigma^k (p'^j - p^j)$$

q^j

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m \int^+ \left(\frac{p^i + p'^i}{2m} - i \frac{\epsilon^{ijk} \sigma^k q^j}{2m} \right) \xi$$

(este termo é uma interação dependente da velocidade, o que é esperado para uma carga se movendo em um campo magnético constante, mas não tem nada a ver com a interação do spin com o campo)

Focando na parte que depende de spin:

$$iM = ie 2m \int^+ \left[F_1(0) \left(-i \frac{\epsilon^{ijk} \sigma^k q^j}{2m} \right) \right] \xi \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') +$$

$$+ ie \bar{u}(p') \left[\frac{i \sigma^{i\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p) \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') =$$

como já tenho uma dependência explícita de q aqui, posso jogar fora a dependência em momento nos espinores e em $u(p)$

$$\sigma^{i\nu} q_\nu = -\sigma^{ij} q^j = -\frac{i}{2} [\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i] q^j = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} q^j = -\epsilon^{ijk} \sigma^k q^j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ie 2m \int^+ \left[F_1(0) \left(-i \frac{\epsilon^{ijk} \sigma^k q^j}{2m} \right) \right] \xi \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') +$$

$$+ ie 2m \int^+ \left[\frac{-i \epsilon^{ijk} \sigma^k q^j}{2m} F_2(0) \right] \xi \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') =$$

$$= -i(2m) e \int^+ \left\{ \frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right\} \xi \left(-i \epsilon^{ijk} q^j \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') \right)$$

$$-i \epsilon^{ijk} q^j \tilde{A}_\alpha^i(\vec{q}') = \tilde{B}_\alpha^k(\vec{q}')$$

que pode ser escrito como:

$$iM \equiv -2mi \int^+ \left(-\mu^k \tilde{B}_\alpha^k \right) \xi \quad (\text{eq. 89.1})$$

onde:

$$\mu^k = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \frac{\sigma^k}{2} \quad (\text{eq. 89.2})$$

Na aproximação de Born:

$$-2mi \tilde{V}(\vec{q}) = -2mi \int^{1+} (-\mu^k \tilde{B}_k)$$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = - \langle \mu^k \rangle \tilde{B}_k$$

(eq. 90.1)

$$\langle \mu^k \rangle \equiv \int^{1+} \mu^k$$

que é exatamente o potencial da interação de um dipolo magnético

Se escrevermos o momento magnético da forma usual:

$$\vec{\mu} \equiv g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S}$$

spin do e⁻
↓
↘ S = $\frac{1}{2} \sigma$

$$g \equiv 2 \left[\frac{F_1(0)}{1} + F_2(0) \right] = 2 + 2F_2(0)$$

(eq. 90.2)

Vimos (eq 87.2) que $F_2 = 0$ em primeira ordem pert. portanto $g = 2$ nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \mathcal{O}(\hbar) + \dots$$

↳ Momento magnético anômalo do elétron

Este momento anômalo é um efeito que só aparece em NLO (1-Loop) e é intrínseco da TQC, de fato calcular esta correção a g (que já se via experimentalmente estar desviando de 2) foi um dos primeiros triunfos da QED. Note que se $F_2(0)$ está assim tão diretamente ligado a uma observação ele deve ser finito, apesar de já sabermos que a função de 3 pontos diverge, calcularemos esta função explicitamente em breve.

Auto-energia do fóton

(Peskin 7.5, Schwartz 16, Nastase 36.1-36.3)

Agora só resta colocar a mão na massa e calcular as correções NLO (1 Loop) da QED e ver que diversas destas previsões que fizemos com argumentos baseados em simetria se realizam. Começemos com a auto-energia do fóton:

The diagram shows a photon line with momentum q entering a circular loop labeled "1PI". The loop is connected to another photon line. The mathematical expression is:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) \equiv i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

(78.3)

A primeira contribuição em loop para esta função é a famosa **Polarização do Vácuo**:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k}+\not{q}+m)}{(k+q)^2-m^2} \right] \equiv i \Pi_2^{\mu\nu}(q)$$

para indicar que estamos em ordem e^2

Note que o que estamos calculando é só o loop , até porque é isto que contribui para a parte 1PI, mas este loop só tem efeito físico quando conectado a um diagrama maior pelas linhas de fóton (por exemplo na soma que dá o propagador completo do fóton, calculada nas pgs 79 e 80). Então, embora muitos livros não deixem isso muito claro, não estamos interessados em uma "bolha no vácuo", o que chamamos de polarização do vácuo é o efeito deste loop conectado a um diagrama maior por um fóton (ou equivalentemente, o "efeito de polarização" que um fóton produz no vácuo).

Agora usamos os mesmos truques usados no caso escalar, começando com a parametrização de Feynman:

$$\text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k}+\not{q}+m)}{(k+q)^2-m^2} \right] = \frac{4 \left[k^\nu (q^\mu + k^\mu) + k^\mu (k^\nu + q^\nu) - g^{\mu\nu} (k^2 + k \cdot q - m^2) \right]}{(k^2-m^2) [(k+q)^2-m^2]}$$

usando o arsenal de identidades com matrizes de Dirac (TQCI 2020, pg 207) ou o pacote FeynCalc no Mathematica

$$\frac{1}{(k^2-m^2) [(k+q)^2-m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{\underbrace{[x[(k+q)^2-m^2] + (1-x)(k^2-m^2)]^2}_D}$$

exatamente o mesmo denominador que temos na pg 48

$$D = l^2 - \Delta^2$$

$$l_\mu = k_\mu + x q_\mu$$

$$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$= \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 - \Delta^2]^2}$$

$$4 \left[k^\nu (q^\mu + k^\mu) + k^\mu (k^\nu + q^\nu) - g^{\mu\nu} (k^2 + k \cdot q - m^2) \right] =$$

$$= 4 \left\{ g^{\mu\nu} \left[(2x-1)l^2 - l^2 + x(1-x)q^2 + m^2 \right] + (1-2x)l^\mu q^\nu + (1-2x)l^\nu q^\mu + 2 \left[l^\mu l^\nu + (x-1)x q^\mu q^\nu \right] \right\} =$$

linear em l

$$= 4 \left\{ 2 l^\mu l^\nu - l^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) \right\} + \text{Linear} [l]$$

Voltamos em $\Pi^{\mu\nu}$, lembrando que a integral dos termos lineares em l dá zero:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2 l^\mu l^\nu - l^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{[l^2 - \Delta^2]^2}$$

este termo também só não integra para zero se $\mu = \nu$, portanto o termo que não zera deve ser proporcional a $g^{\mu\nu}$ (simplesmente porque é um tensor), então:

$$g^{\mu\nu} \left(\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} l^\mu l^\nu f(l^2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} A g^{\mu\nu} f(l^2) \right)$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} l^2 f(l^2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} A \underbrace{g^{\mu\nu} g^{\mu\nu}}_d f(l^2) \rightarrow A = \frac{l^2}{d}$$

d (como já já eu farei regularização dimensional, não quero colocar 4 aqui e depois esquecer de generalizar para d)

$$\boxed{l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{l^2 g^{\mu\nu}}{d}} \quad (\text{eq. 92.1})$$

Fazendo a rotação de Wick: $\int \left\{ \begin{array}{l} l^0 = i l_E^0 \\ dl^0 = i dl_E^0 \end{array} \right. \quad l^2 = -l_E^2$

temos:

$$i\Pi_2^{ND}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{\left(1 - \frac{d}{2}\right) l_E^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{[l_E^2 + \Delta^2]^2}$$

(eq. 92.2)

Esta integral é divergente, como previsto na eq. 78.4. No entanto se colocarmos um cut-off Λ aqui, concluiremos que ela diverge como Λ^2 e não como o $\text{Ln}[\Lambda]$ que previmos. Isso ocorre porque a **Regularização por Cut-Off viola as identidades de Ward** fazendo com que $\Pi^{\mu\nu}$ tenha justamente a forma ruim (mostrada no pé da pg 80) que gera um fóton massivo (fica como **exercício** mostrar isso). Por isso a divergência fica igual a divergência superficial prevista na pg 76 ($D = 2$ para este diagrama), antes que argumentos de simetria nos fizessem observar que a divergência era um $\text{Ln}[\Lambda]$. Supostamente, se usarmos uma regularização que respeite a identidade de Ward isso deve ser corrigido. Isso é verdade tanto para a regularização de Pauli-Villars quanto para Dim.-Reg. Este é um exemplo de escolha de regularização usando a implementação quântica da simetria (W.T.) como critério.

Usaremos a regularização dimensional. Usando os métodos das páginas 49 e 50 podemos deduzir uma forma bem geral para as integrais que aparecerão a seguir (**exercício**):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{(l_E^2)^m}{(l_E^2 + \Delta^2)^n} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - m - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(m + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - m}$$

(eq. 92.3)

Neste exemplo não foi preciso fazer muitas manipulações de matrizes de Dirac, mas em geral temos que fazer as seguintes modificações:

$$\left. \begin{array}{l} d=4-\epsilon \\ d \sim 4 \\ \epsilon \sim 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{g^{\mu\nu}, g^{\nu\mu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \text{Tr}[1] = 4 \\ g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = d \\ g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} = -(2-\epsilon)g^{\nu\mu} \\ g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} = 4g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} - \epsilon g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} \\ g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} = -2g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + \epsilon g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mu = \{0, 1, 2, 3\} \\ \text{ou} \\ \nu = \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

(eq. 93.1)

(se estiver interessado em uma derivação mais formal destas coisas, veja o Polchinski (String Theory, Vol II, apêndice B) ou de Wit & Smith (Field Theory in Particle Physics, apêndice E)

Voltando em 92.2 temos:

$\epsilon = 4 - d$

mesma função do μ introduzido na pg 48, mantendo e adimensional

$$i\tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \mathcal{N}^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{\left(1 - \frac{d}{2}\right) l_E^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{[l_E^2 + \Delta^2]^2} =$$

$$\begin{array}{l} (92.3) \\ m=0 \\ n=2 \end{array} \left\{ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \right.$$

$\Gamma(z+1) \Rightarrow \Gamma(z)$

$$\begin{array}{l} (92.3) \\ m=1 \\ n=2 \end{array} \left\{ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{1 - \frac{d}{2}}} \left(\frac{d}{2}\right) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left(\frac{\Delta^2 d}{2-d}\right) \right.$$

$$= -4ie^2 \mathcal{N}^\epsilon \int_0^1 dx (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left\{ \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{\Delta^2 d}{2-d}\right)}_{-\Delta^2} g^{\mu\nu} - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) \right\} =$$

$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)q^2$

$$= -4ie^2 \mathcal{N}^\epsilon \int_0^1 dx (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left\{ \left[-m^2 + x(1-x)q^2 \right] g^{\mu\nu} - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) \right\} =$$

$$= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i (-8e^2 \mathcal{N}^\epsilon) \int_0^1 dx (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta^2)^{2 - \frac{d}{2}}} x(1-x) \equiv (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i \tilde{\Pi}_2(q^2)$$

que agora satisfaz explicitamente a forma exigida pelas identidades de W.T., com:

$$\hat{\Pi}_2(q^2) = \frac{-8e^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^\epsilon} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(\Delta^2)^{\epsilon/2}} \quad (\text{eq. 94.1})$$

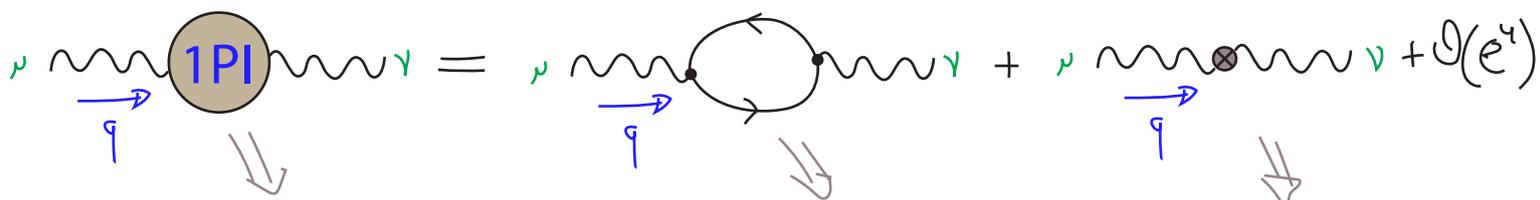
para $d \rightarrow 4$ temos:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{\mu^\epsilon}{(4\pi)^\epsilon} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(\Delta^2)^{\epsilon/2}} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \text{Ln}(\Delta^2/\mu^2) - \gamma + \text{Ln}(4\pi) \right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\hat{\Pi}_2(q^2) = \frac{-e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \text{Ln}(\Delta^2/\mu^2) - \gamma + \text{Ln}(4\pi) \right) \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (\text{eq. 94.2})$$

Esta sim diverge como esperávamos! (este $1/\epsilon$ é equivalente ao $\text{Ln}(\Lambda)$, mas para ver isto explicitamente teríamos que usar Pauli-Villars, veja pg 250 do Peskin).

Além da polarização do vácuo, temos o contratermo que contribui para a auto energia do fóton:



$$i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) = i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \hat{\Pi}_2(q^2) - i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \mathcal{J}_3 + \dots$$

E a condição de renormalização 83.1(b) impõe: $\Pi(q^2=0) = 0$

$$\therefore \hat{\Pi}_2(q^2=0) - \mathcal{J}_3 = 0$$

$$\Delta^2(q^2=0) = m^2 - \cancel{x(1-x)q^2}$$

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \text{Ln}(m^2/\mu^2) - \gamma + \text{Ln}(4\pi) \right) \quad (\text{eq. 94.3})$$

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \text{Ln}\left(\frac{m^2}{\Delta^2}\right) + \mathcal{O}(e^4 \sim \alpha^2) \quad (\text{eq. 94.4})$$

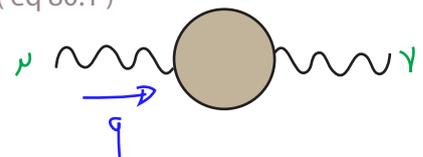
Note que esta última expressão, que é a primeira correção radiativa ao propagador do fóton tem várias características notáveis:

(1) É finita e proporcional ao parâmetro de expansão (α ou e^2), logo no regime perturbativo ela será uma pequena correção ao que se encontra a nível árvore. O que ocorreu aqui é que os dois infinitos (um no loop e outro no contratérmo) se cancelaram para dar um termo finito que multiplica α , e isso nos permite falar de uma série que faz sentido! Por esta razão este método é frequentemente chamado de **Renormalized Perturbation Theory**.

(2) Ela depende do momento (a dependência está escondida em Δ), mas independe dos parâmetros não físicos da teoria (ϵ e μ foram eliminados). Esta correção é física!

Já vimos que as correções do propagador do fóton definem a carga física, na eq. 85.1, mas aquela equação é pouco útil para entender como, uma vez que tem dois parâmetros não físicos (tanto Z_3 quanto e_0 são infinitos). Vamos tentar expressar o efeito do propagador só em termos das grandezas renormalizadas. O propagador completo do fóton é dado por:

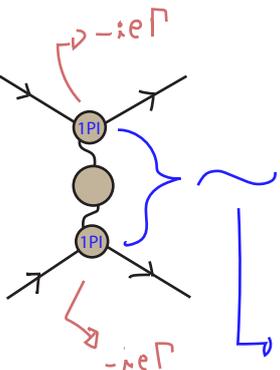
(eq 80.1)



$$= \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}$$

que calculamos em ordem α na eq. 94.4

E ele aparece no espalhamento entre quaisquer duas partículas carregadas:



$$\frac{-i g^{\mu\nu} e^2}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}$$

este é um número CONSTANTE, definido pela condição 83.2

estou interessado na função que sempre aparece aqui, que é o produto das cargas vindas "de cada ponta" com o propagador do fóton, estou ignorando o resto da expressão.

Note que para $q^2 = 0$, temos: (83.1(b)) $\Pi(q^2 = 0) = 0$

$$\frac{-i g^{\mu\nu} e^2}{q^2 (1 - \Pi(q^2))} \Rightarrow \frac{-i g^{\mu\nu} e^2}{q^2}$$

E a interação se comporta exatamente como esperávamos, com a carga física e na escala de renormalização que define esta carga ($q^2 = 0$). No entanto para $q^2 \neq 0$ tudo ocorre como se tivéssemos outro valor para a carga:

$$e_{\text{EFF}}^2(q^2) \equiv \frac{e^2}{1 - \Pi(q^2)} \quad (\text{eq. 96.1})$$

$$\alpha_{\text{EFF}}(q^2) \equiv \frac{\alpha}{1 - \Pi(q^2)}$$

constante (mesmo!) \rightarrow e^2

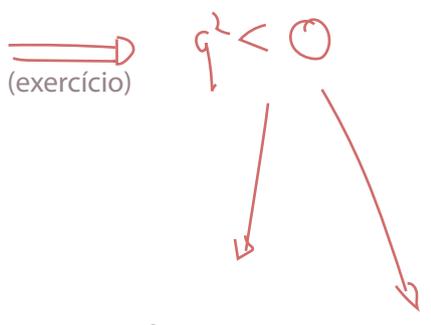
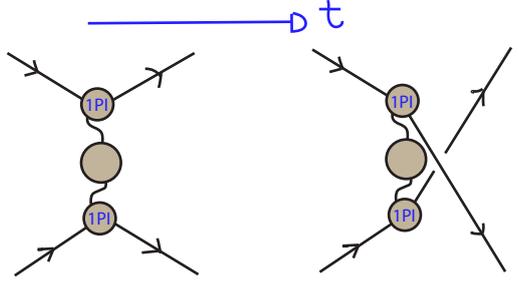
\rightarrow função de q^2 e de e^2 , também conhecida como **Running Constant!**

$$e_{\text{EFF}}^2(0) = e^2 \quad \alpha_{\text{EFF}}(0) = \alpha$$

Embutir esta dependência da interação com o momento (que no fundo é uma dependência de $\mathcal{M}(q^2)$) na carga é bastante conveniente, apesar de causar confusão em um primeiro momento, e por isso usaremos estas Running Constants com frequência. O importante é nunca confundir $e_{\text{EFF}}(q^2)$ com e , **mesmo depois que suprimirmos este subscrito "EFF"**.

Efeitos físicos de $\Pi(q^2)$ (em ordem α)

Além do running da carga, podemos ver outras consequências dos loops introduzidos em $P(q^2)$, comecemos pensando no caso em que o fóton é mesmo trocado entre partículas on-shell, nos canais u e t:



(eq. 94.4)

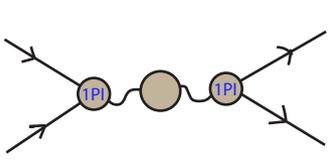
$$\Pi(q^2) = -\frac{2\kappa}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right) \in \mathbb{R}$$

> 0

(isso também vale para $q^2 = 0$ e mostra está de acordo com o que assumimos na pg 80)

Além do running da carga, podemos ver outras consequências dos loops introduzidos em $P(q^2)$, comecemos pensando no caso em que o fóton é mesmo trocado entre partículas on-shell, nos canais u e t:

No caso em que $q^2 > 0$ (canal s) a função é analítica até $q^2 = 4m^2$, e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par real elétron-pósitron)



$$m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0 \implies q^2 \geq 4m^2$$

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico). Vimos em TQC I (2020, pg 202) que a troca de um fóton no canal t gera o seguinte entre cargas opostas (potencial de Coulomb):

$$\tilde{V}(q) = -\frac{e^2}{|\vec{q}|^2} \quad (\text{LO})$$

Esta expressão deve ser verdade perto de $q = 0$, mas acabamos de ver que devemos corrigi-la conforme aumentamos q , trocando e por e_{EFF} :

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 (1 - \Pi(-|\vec{q}|^2))}$$

canais t e u: $q^\mu = p'^\mu - p^\mu \xrightarrow{\text{n rel.}} q^\mu = (m-m, \vec{p}' - \vec{p}) \Rightarrow q^2 = -|\vec{q}|^2$

$$\Pi(-|\vec{q}|^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 + x(1-x)|\vec{q}|^2}\right) =$$

$$\stackrel{|\vec{q}|^2 \ll m^2}{\approx} -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[-x(1-x) \frac{|\vec{q}|^2}{m^2} \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{|\vec{q}|^2}{30 m^2} \right) = \frac{\alpha |\vec{q}|^2}{15\pi m^2}$$

$$\ln\left(\frac{m^2}{m^2 + x(1-x)|\vec{q}|^2}\right) = -\ln\left(1 + x(1-x)\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) = -x(1-x)\frac{|\vec{q}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{q}|^4}{m^4}\right)$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{V}(\vec{q}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-4\pi\alpha}{|\vec{q}|^2 \left(1 - \frac{\alpha |\vec{q}|^2}{15\pi m^2}\right)} =$$

$$\approx -4\pi\alpha \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[1 + \frac{\alpha |\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right] =$$

$$= -4\pi\alpha \left[\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right] = \underbrace{-\frac{\alpha}{|\vec{x}|}}_{\text{Coulomb}} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x})$$

O potencial muda para pequenas distâncias (Termo de Uehling)

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

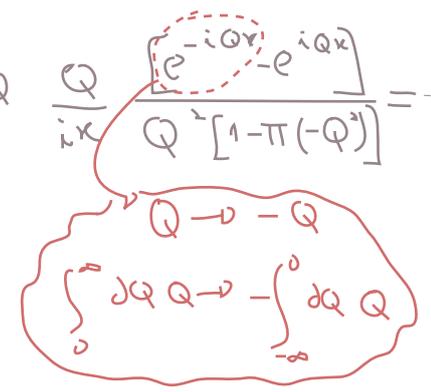
e esta é uma das contribuições do Lamb shift (e mais um sucesso histórico da QED).

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em $|\vec{q}|^2/m^2$, podemos fazer melhor escrevendo:

$|\vec{q}| \equiv Q$

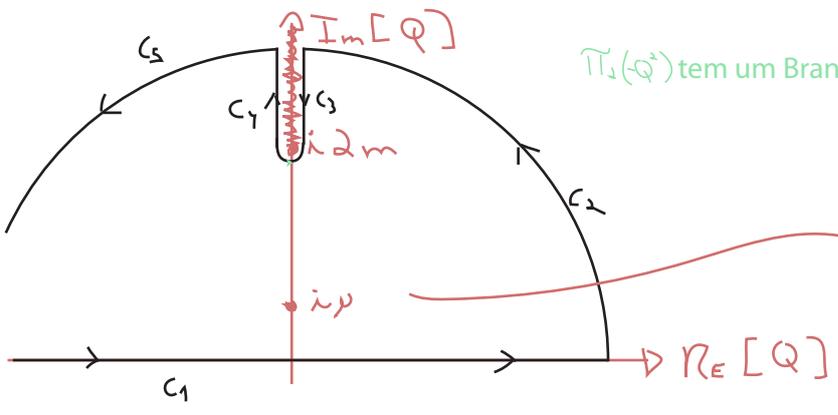
$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \pi(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Q^2 \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \pi(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos(\theta)) Q^2 \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \pi(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q}{i\kappa} \frac{[e^{-iQr} - e^{iQr}]}{Q^2 [1 - \pi(-Q^2)]} = \dots$$



$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2}$$

inserido para regularizar o polo em $Q^2=0$



$\pi_1(Q^2)$ tem um Branch Cut para $\begin{cases} -Q^2 > 4m^2 & \text{Im}[Q] > 2m \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \rightarrow \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

contribui para a integral dando o potencial $(-\frac{\alpha}{\kappa})$ de Coulomb

$$\frac{i\kappa}{\pi\kappa} \int_{c_1} = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{e^{-N\kappa}}{2} [1 + \pi(\mu^2)] \stackrel{N \rightarrow 0}{=} -\frac{\alpha}{\kappa}$$

$$\oint = \int_{c_1} + \int_{c_2+c_5} + \int_{c_3+c_4} \Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{c_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{c_3+c_4} \underbrace{\hspace{10em}}_{SV(\vec{x})}$$

As integrais perto do corte (curvas C_3 e C_4) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i\infty+\epsilon}^{i2m+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i2m-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dQ F(Q) = - \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \operatorname{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$Q = Q \pm \epsilon$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \pi i (-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} R_\epsilon [F(Q+\epsilon)] &= R_\epsilon [F(Q-\epsilon)] \\ \operatorname{Im} [F(Q+\epsilon)] &= -\operatorname{Im} [F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\} \text{por conta do Ln em } \Pi^2$$

$$\Delta V(x) = -\frac{2\alpha}{\pi\kappa} 2i \operatorname{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \pi i (-Q-\epsilon)^2] \right] =$$

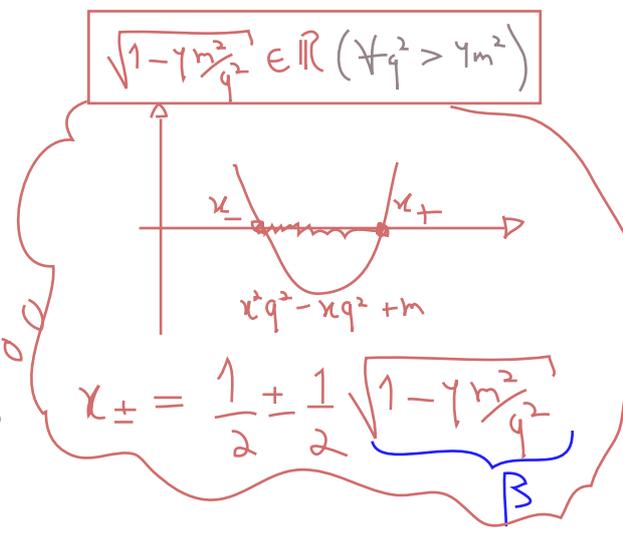
$Q - \epsilon \sim Q$ $q \equiv -iQ$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \operatorname{Im} \left[\int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} [1 + \pi (-i q - \epsilon)^2] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qx}}{q} \operatorname{Im} [\pi (q^2 + i\epsilon)]$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para $q^2 > 4m^2$ partindo de 94.4: $\Pi(q^2) = -\frac{\kappa}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \operatorname{Ln} \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$

$$\int_0^1 dx x(1-x) \operatorname{Ln} \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

$\rho(x, q^2)$



$$\operatorname{Im} [\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

É importante saber de que lado estamos no Branch-Cut do Ln (fixa o sinal da parte imaginária):

$$z_{\pm} \equiv \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)(q^2 \pm i\epsilon)}$$

$\operatorname{Im} [z] \quad \operatorname{Re} [z] \quad \operatorname{Im} [\operatorname{Log} [z_{\pm}]] = \pm \pi$

$$z_{\pm} = \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2 \mp x(1-x)i\epsilon} \approx m^2 \left[\frac{1}{m^2 - x(1-x)q^2} \pm \frac{x(1-x)\lambda\epsilon}{(m^2 - x(1-x)q^2)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \left[\Pi_2(q^2 + i\epsilon) \right] &= -\frac{2\alpha}{\pi} (+\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x) x = \\
 &= -2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)
 \end{aligned}$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_m^\infty dq \frac{e^{-qx}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \quad (\text{eq. 100.1})$$

Estudemos isto em duas regiões:

Ⓘ $x \gg \frac{1}{m} \Rightarrow$ Neste caso a exponencial e^{-qx} suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso: $q \approx 2m$

$$\begin{aligned}
 \delta V(x) &= \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{1 - \frac{4m^2}{(2m+t)^2}}{(2m+t)^2}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2} \\
 t = q - 2m &\approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{m}} \frac{3}{2} + O(t)
 \end{aligned}$$

$\sim \frac{4m^2 + 2m^2}{4m^2} = \frac{3}{2}$

$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} \quad (\text{eq. 100.2})$$

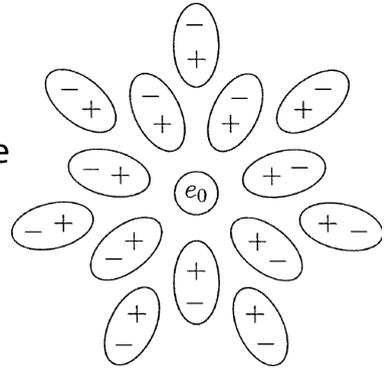
$$\int_0^\infty dt \sqrt{\frac{t}{m}} e^{-(t+2m)x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{mx}} e^{-2mx}$$

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right) \quad (\text{eq. 100.3})$$

Potencial de Uehling

Polarização do Vácuo

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato $1/2m$). A interpretação é de que a distâncias menores que $1/2m$ temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{\text{II}} \quad -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \Pi(q^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{\cancel{m^2} - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 94.4)

$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

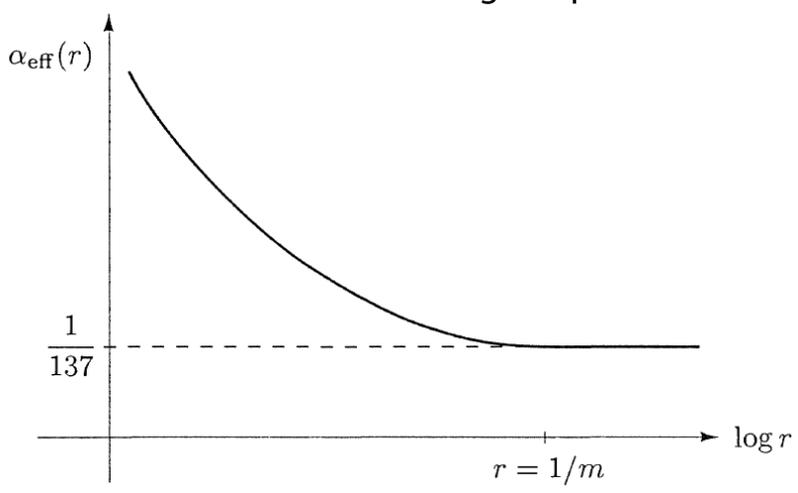
$$= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 96.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} e^{-5/3} \right]}$$

(eq. 101.1)

Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas), $-q^2$ fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo $q = 1/r$ e obtendo o gráfico abaixo:



A interpretação disso é que estamos penetrando na nuvem de pares que “veste” o elétron e assim conseguimos ver uma carga cada vez maior. Esse efeito é bem sutil, note que numericamente:

$$\alpha = \frac{1}{137} \Rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) \approx \alpha \left[1 + \underbrace{\frac{\alpha}{3\pi}}_{0,0008} \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} \underbrace{e^{-5/3}}_{0,19} \right] \right]$$

Portanto, temos que ir para momentos realmente altos para ver este efeito. Como a carga vai aumentando, podemos nos perguntar também **onde a teoria de perturbação falha**, no sentido em que a correção de 1-loop fica tão grande quanto a LO, ou seja:

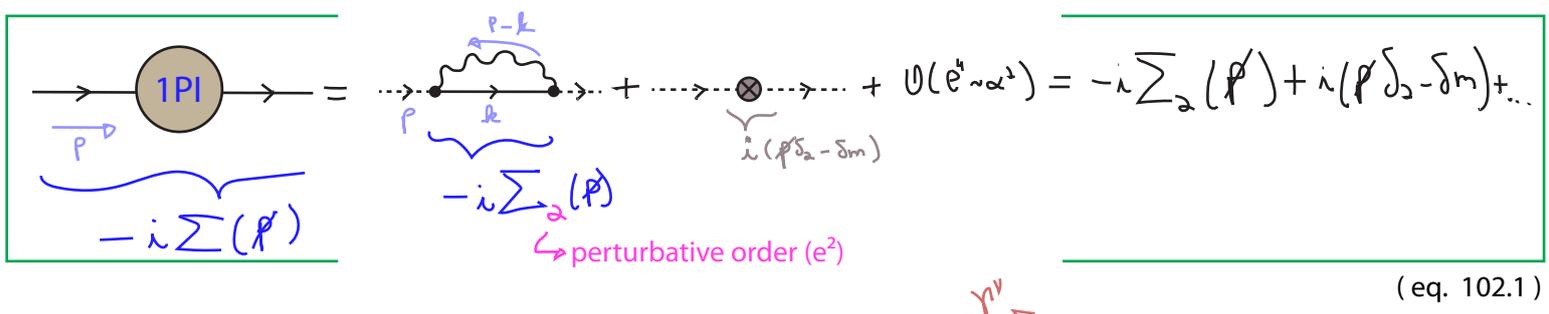
$$1 \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} e^{-5/3} \right] \iff q^2 \sim -8 \cdot 10^{54} \text{ GeV}^2 \quad \text{😱}$$

esse é o famoso **Polo de Landau da QED** (e não precisamos nos preocupar muito com ele).

Auto-energia do elétron

(Nastase 36.4, Peskin 7.1, Schwartz 18.2-18.5)

Passemos agora para a segunda função 1PI, a **auto-energia do elétron**, que usando as equações 83.1(a) e 83.1(b) fixará os contratermos δ_2 e δ_m :



(eq. 102.1)

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p-k)^2 - m_\gamma^2 + i\epsilon}$$

“massa” do fóton no fim faremos: $m_\gamma \rightarrow 0$
 (estamos evitando as divergências IR, voltaremos a elas mais tarde para justificar o que fizemos aqui)

Parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_\gamma^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2x k \cdot p + x p^2 - x m_\gamma^2 - (1-x)m^2]^2}$$

$$\stackrel{l_\nu = k_\nu - x p}{=} \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 - \Delta_f^2]^2}$$

$\Delta_f^2 \equiv (1-x)m^2 - x(1-x)p^2 + x m_\gamma^2$

(eq. 102.2)

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu (\not{l} + x \not{p} + m) \gamma^\nu}{[l^2 - \Delta_f^2]^2}$$

Regularização Dimensional ($\epsilon = 4 - d$):

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu (x \not{p} + m) \gamma^\nu}{[l^2 - \Delta_f^2]^2}$$

lembrando que (93.1): $\gamma_\nu \not{p} \gamma^\nu = -(2-\epsilon) \not{p} \Rightarrow \gamma_\nu \not{p} \gamma^\nu = -(2-\epsilon) \not{p}$
 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$
 $\gamma_\nu \gamma^\nu = d$

$$\begin{aligned}
 -i \Sigma_2(p) &= -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-\kappa(2-\epsilon)\not{p} + d m}{[l^2 - \Delta_\mp^2]^2} = \\
 &= -ie^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^d} \frac{-\kappa(2-\epsilon)\not{p} + d m}{[l_\epsilon^2 + \Delta_\mp^2]^2}
 \end{aligned}$$

A integral em l é idêntica a uma das que fizemos na página 93 (para $m = 0, n = 2$):

$$-i \Sigma_2(p) = \frac{-ie^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx [(4-\epsilon)m - \kappa(2-\epsilon)\not{p}] \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(\Delta_\mp^2)^{2 - \frac{d}{2}}} = \quad \boxed{\tilde{\mu} \equiv 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{d \rightarrow 4} &= \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [(4-\epsilon)m - \kappa(2-\epsilon)\not{p}] \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \text{Log}[4\pi] - \text{Log}\left[\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta_\mp^2}\right] + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\
 &\quad \underbrace{(4m - 2\kappa\not{p}) + \epsilon(\kappa\not{p} - m)}
 \end{aligned}$$

$$-i \Sigma_2(p) = \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\underbrace{(4m - 2\kappa\not{p}) \frac{2}{\epsilon}}_{\text{parte divergente}} + (4m - 2\kappa\not{p}) \text{Log}\left[\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta_\mp^2}\right] + 2(\kappa\not{p} - m) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

(eq. 103.1)

$$= \frac{i\alpha}{\pi} \left(\frac{\not{p} - 4m}{2\epsilon} + \text{Termos finitos} \right) \quad \text{(eq. 103.2)}$$

com isso, podemos fazer o "esquema de renormalização on-shell" (ou Subtração On-Shell) usando as condições 83.1(a) e 83.1(c) com $\not{p}_0 = m \hat{1}$:

$$\left. \begin{array}{l} (83.1(c)) \\ \not{p}_0 = m \hat{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0 \quad \dots \text{... } \boxed{\not{p}^2 = m^2}$$

↙ (102.1)

$$\frac{d}{d\not{p}} \left(\Sigma_2(\not{p}) - (\not{p} \delta_2 - \delta m) \right) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \Rightarrow \delta_2 = \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_2(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} \quad \text{(eq. 103.3)}$$

$$(83.1(a)) \Rightarrow \sum(m) = 0 = \sum_2(m) - (m\delta_2 - \delta m)$$

$$0 = \sum_2(m) - m\delta_2 + \delta m$$

$$\delta m = m\delta_2 - \sum_2(m) \quad (\text{eq. 104.1})$$

Começamos por:

$$\frac{d}{d\phi} \sum_2 = \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[(4m - 2x\phi) \frac{2}{\epsilon} + 2(x\phi - m) - (4m - 2x\phi) \text{Log} \left[\frac{\Delta_\phi^2}{\tilde{\nu}^2} \right] \right] \right\}$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[-\frac{4x}{\epsilon} + 2x + 2x \text{Log} \left[\frac{\Delta_\phi^2}{\tilde{\nu}^2} \right] - \frac{(4m - 2x\phi) \cancel{x}}{\Delta_\phi^2} \underbrace{\left[-2x(1-x)\phi \right]}_{\frac{d\Delta_\phi^2}{d\phi}} \right]$$

Lembrando que: $\phi = m \Rightarrow \begin{cases} \Delta_\phi^2(\rho) = (1-x)m^2 - x(1-x)\rho^2 + xm_\gamma^2 \\ \Delta_\phi^2(m) = (1-x)m^2 - x(1-x)m^2 + xm_\gamma^2 = (1-x)m^2 + xm_\gamma^2 \end{cases}$

$$\frac{d}{d\phi} \sum_2 /_{\phi=m} = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[-\frac{4x}{\epsilon} + 2x + 2x \text{Log} \left[\frac{\Delta_\phi^2}{\tilde{\nu}^2} \right] - \frac{(4m - 2xm)}{(1-x)^2 m^2 + xm_\gamma^2} \underbrace{\left[-2x(1-x)m \right]}_{\frac{4x(1-x)(2-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + xm_\gamma^2}} \right] =$$

$$\frac{d}{d\phi} \sum_2 /_{\phi=m} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \, x \left[-\frac{2}{\epsilon} + 1 + \text{Log} \left[\frac{\Delta_\phi^2}{\tilde{\nu}^2} \right] + \frac{2(1-x)(2-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + xm_\gamma^2} \right] \quad (\text{eq. 104.2})$$

A integração pode ser feita no Mathematica (`Integrate[%, {x, 0, 1}, Assumptions -> {m > 0, mγ > 0, μ2 > 0}]`)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \sum_2 /_{\phi=m} &= \frac{1}{4m^4 \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2} \pi \epsilon} \\ &\alpha \left(-3m_\gamma (-4m^4 - 2m^2 m_\gamma^2 + m_\gamma^4) \in \text{ArcTan} \left[\frac{m_\gamma}{\sqrt{4m^2 - m_\gamma^2}} \right] + 3m_\gamma (-4m^4 - 2m^2 m_\gamma^2 + m_\gamma^4) \in \text{ArcTan} \left[\frac{-2m^2 + m_\gamma^2}{m_\gamma \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2}} \right] + \right. \\ &\left. \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2} \left((6m^4 \epsilon - 3m_\gamma^4 \epsilon) \text{Log}[m] + 3(-2m^4 + m_\gamma^4) \in \text{Log}[m_\gamma] - m^2 \left(3m_\gamma^2 \epsilon + m^2(2+4\epsilon) + m^2 \in \text{Log} \left[\frac{\mu_2}{m_\gamma^2} \right] \right) \right) \right) \end{aligned}$$

o que não é muito útil, mas no limite de $m_\gamma \rightarrow 0$ (Refine[Series[%, {m_γ, 0, 2}], {m > 0, μ2 > 0, m_γ > 0}]):

$$\frac{d}{d\phi} \Sigma_2 \Big|_{\phi=m} = -\frac{\alpha}{2\pi\epsilon} + \frac{\alpha \left(-4 + \overbrace{6 \text{Log}[m] - 6 \text{Log}[m_\gamma] - \text{Log}\left[\frac{\mu_2}{m_\gamma^2}\right]}^{3L_N(\mu^2) - 3L_N(m_\gamma^2) - L_N(\mu^2) + L_N(m_\gamma^2) = -2L_N\left(\frac{m_\gamma^2}{\mu^2}\right) - L_N\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)} \right)}{4\pi}$$

$$\frac{d}{d\phi} \Sigma_2 \Big|_{\phi=m} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 + L_N\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2} L_N\left(\frac{\mu_2^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{eq. 105.1})$$

(103.3) \Rightarrow

$$\Sigma_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 + \frac{1}{2} L_N\left(\frac{\mu_2^2}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{eq. 105.2})$$

$\rightarrow UV$
 $\rightarrow IR$

Ambas divergências aparecem aqui

Para obter δm temos que calcular:

$$\Sigma_2(m) = \frac{m\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[(2-x) \frac{2}{\epsilon} + (2-x) \text{Log}\left[\frac{\mu_2^2}{D_\phi^2}\right] + x-1 \right]$$

Nosso amigo Mathematica (Integrate[%, {x, 0, 1}, Assumptions -> {m > 0, m_γ > 0, μ2 > 0}]):

$$\Sigma_2(m) = \frac{3m\alpha}{2\pi\epsilon} + \frac{1}{4m^3 \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2} \pi} \alpha \left((-8m^4 m_\gamma - 2m^2 m_\gamma^3 + m_\gamma^5) \text{ArcTan}\left[\frac{m_\gamma}{\sqrt{4m^2 - m_\gamma^2}}\right] + m_\gamma (8m^4 + 2m^2 m_\gamma^2 - m_\gamma^4) \text{ArcTan}\left[\frac{-2m^2 + m_\gamma^2}{m_\gamma \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2}}\right] + \sqrt{4m^2 - m_\gamma^2} \left(4m^4 + m^2 m_\gamma^2 - m_\gamma^4 \text{Log}\left[\frac{m_\gamma}{m}\right] - 3m^4 \text{Log}\left[\frac{m^2}{\mu_2}\right] \right) \right)$$

Que de fato é regular em $m_\gamma \rightarrow 0$ (Refine[Limit[%, m_γ -> 0], {m > 0, μ2 > 0}]):

$$\Sigma_2(m) = \frac{m\alpha}{2\pi} \left[\frac{3}{\epsilon} + 2 + \frac{3}{2} L_N\left(\frac{\mu_2^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{eq. 105.3})$$

(104.1) \Rightarrow

$$\delta m = m \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 + \frac{1}{2} L_N\left(\frac{\mu_2^2}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) \right] \right\} - \Sigma_2(m)$$

$$\delta m = -\frac{m\alpha}{2\pi} \left[\frac{4}{\epsilon} + 4 + 2 L_N\left(\frac{\mu_2^2}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{eq. 105.4})$$

Note que a correção à massa do elétron é proporcional a própria massa. Poderíamos trocar m por m_0 na equação 105.4 (a diferença entre eles é ordem α , que multiplicado pelo α já presente em 105.4 viraria uma correção de ordem superior) e a conclusão é que se começássemos com massa zero, as correções radiativas não gerariam esta massa. Havíamos previsto isso na pg 77, usando a simetria quiral, e aqui vemos realizado explicitamente em ordem 1-loop.

Chegamos então, nesta ordem de perturbação, para uma expressão para a auto-energia:

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}) &= \Sigma_2(\not{p}) - (\not{p}\delta_2 - \delta m) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\ &= \Sigma_2(\not{p}) - \underbrace{\Sigma_2(m)}_{\text{(dado por 105.3)}} - (\not{p}-m)\underbrace{\delta_2}_{\text{(dado por 105.2)}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

É muito difícil integrar **esta parte**, então vale a pena voltar atrás na integração em x , usando 103.1 e 104.2 para escrever:

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \, 2x \left[\underbrace{\cancel{(\not{p}-m)\frac{2}{\epsilon}}}_{(1-x)m^2 - x(1-x)\not{p}^2 + xm_f^2} - \cancel{(\not{p}-m)\text{LN}[\tilde{\lambda}^2]}_{(1-x)m^2 + xm_f^2} + (\not{p}-m) + \not{p}\text{LN}\left[\frac{\Delta_0^2(\not{p})}{\Delta_f^2(m)}\right] - m\text{Log}\left[\frac{\Delta_f^2(m)}{\tilde{\lambda}^2}\right] \right] \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \, 2x \left[\underbrace{\cancel{(\not{p}-m)\frac{2}{\epsilon}}}_{(1-x)m^2 - x(1-x)\not{p}^2 + xm_f^2} + (\not{p}-m) + (\not{p}-m)\text{Log}\left[\frac{\Delta_f^2(m)}{\tilde{\lambda}^2}\right] + \frac{2(1-x)(2-x)m^2}{(1-x)\not{p}^2 + xm_f^2}(\not{p}-m) \right] = \\ &= (\not{p}-m) \frac{d\Sigma_2}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \quad (104.2) \end{aligned}$$

$$\Sigma(\not{p}) = + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \, 2x \left\{ \not{p}\text{LN}\left[\frac{\Delta_0^2(\not{p})}{\Delta_f^2(m)}\right] - \frac{2(1-x)(2-x)m^2}{(1-x)\not{p}^2 + xm_f^2}(\not{p}-m) \right\} \quad (\text{eq. 106.1})$$

Não é muito esclarecedor olhar a forma analítica do resultado da integral, mas vale ressaltar que o parâmetro μ e a divergência UV foram eliminados. A integral do termo logarítmico não tem divergência IR (podemos tomar $m_f \rightarrow 0$ ali sem prejuízo) e é real para $-m < \not{p} < m$, e desenvolve uma parte imaginária quando o momento supera a massa (em módulo).

O segundo termo no integrando vai nos dar:

$$\Sigma(\not{p}) = \dots + \frac{\alpha}{2\pi} (\not{p}-m) \left[1 + \text{LN}\left(\frac{m_f^2}{m^2}\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m_f}{m}\right)$$

que novamente contém a divergência IR (que ainda não atacamos).

Existe uma outra opção popular para as condições de normalização, que é mais simples do ponto de vista calculacional, embora tenha uma interpretação mais complicada. Assim como fizemos para o propagador escalar (pg 21) e para o fóton (pg 80), poderíamos ter ressomado as contribuições 1PI para obter o propagador completo do elétron (veja eq. 18.33 do Schwartz, lembrando que ele define Σ com sinal oposto ao nosso):

$$\text{Diagram} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}$$

pole mass $\rightarrow \Sigma(m) = 0$

A exigência de que m fosse a massa física (on-shell) ditou a **condição de renormalização** acima. Mas poderíamos ter usado qualquer outro critério:

$$\text{Diagram} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_R - \Sigma_R(p)}$$

pole mass $\rightarrow \Sigma(m) = 0$ "renormalized mass"

Aqui m_R é definido por $\delta m_R \equiv Z_{2R} m_0 - m_R$ ao passo em que antes esta equação definia δm . Tínhamos uma condição sobre m e isso nos permitia calcular δm :

" m é a massa física" $\rightarrow \delta m$

Mas podemos fazer o contrário:

"propriedades escolhidas para δm_R " $\rightarrow m_R$ (consistentemente também alteramos $\delta 2$)

Note que desta forma **o propagador não tem um polo em m_R** , então chamar isto de massa é de partida um abuso de linguagem, mas assim o faremos (é a **Massa Renormalizada** ou **Running Mass**). Mas qual é esta condição que colocaremos sobre δm ? Lembre-se que:

$$\Sigma(p) = \underbrace{\Sigma_2(p)}_{(103.2)} - (p \delta 2 - \delta m) + \dots$$

$$\frac{-\alpha}{2\pi} \frac{(p - 4m)}{\epsilon} + \text{Finitos} \Rightarrow \Sigma_{2R}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(p - 4m_R)}{\epsilon}$$

O chamado **Esquema MS** (de Minimal Subtraction) consiste em impor que δm e $\delta 2$ contêm (e subtraem de Σ_2) apenas os termos divergentes no UV:

Esquema MS:

$\delta 2^{MS} = -\frac{\alpha}{2\pi\epsilon}$
(eq. 107.1)

$\delta m^{MS} = -\frac{4\alpha m_{MS}}{2\pi\epsilon}$

(que obviamente é uma simplificação enorme no cálculos dos δ 's, compare com o que fizemos antes)

Isso implica que:

$$\Sigma_{MS}(\not{p}, \not{N}) = \text{"Finitos"}(\mu) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[(4m_{MS} - 2x\not{p}) \text{Log} \left[\frac{\not{N}^2}{\Delta^2} \right] + 2(x\not{p} - m_{MS}) \right]$$

$L_N[\not{N}^2] + L_N[4\pi e^{-\delta}] - L_N(\Delta^2)$

Subtraction Point

(não estamos mudando em nada a parte IR, então vou ignorá-la agora)

Note que esta escolha faz com que a função 1PI agora dependa deste **parâmetro μ** , que antes sumia da conta. Note que **este parâmetro** não precisava surgir daquela correção que fizemos lá atrás na dimensão da constante de acoplamento, **é uma coisa independente**. Se tivéssemos deixado a dimensão errada do acoplamento, ou tivéssemos regularizando por Pauli-Villars (**exercício**), teríamos que introduzir o Subtraction Point agora, para dar dimensão de massa à Σ .

Um esquema ainda mais popular, quando se trata de Dim. Reg., é notar que sempre teremos estes fatores de $\text{Log}[4\pi]$ e γ acompanhando a divergência:

$$\Sigma_{MS}(\not{p}, \not{N}) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - \gamma m_{MS}) L_N[4\pi e^{-\delta}] + \dots \right]$$

e, portanto, podemos subtraí-los também:

Esquema \overline{MS} :

$$\Sigma_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{2\pi\epsilon} - \frac{\alpha}{4\pi} L_N[4\pi e^{-\delta}] \quad (\text{eq. 107.1})$$

$$\Sigma_m^{\overline{MS}} = -\frac{4\alpha m_{\overline{MS}}}{2\pi\epsilon} - \frac{4\alpha m_{\overline{MS}}}{4\pi} L_N[4\pi e^{-\delta}] \quad (\text{eq. 107.2})$$

$$\Sigma_{\overline{MS}}(\not{p}, \not{N}) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[(2m_{\overline{MS}} - x\not{p}) \text{Log} \left[\frac{\not{N}^2}{\Delta^2} \right] + (x\not{p} - m_{\overline{MS}}) \right] \quad (\text{eq. 107.3})$$

Note que o polo do elétron continua no mesmo lugar, e portanto podemos relacionar esta "Massa \overline{MS} barra" com a massa física:

$$m = m_R + \Sigma_R(m)$$

$$m_{\overline{MS}}(\not{N}) = m - \Sigma_{\overline{MS}}(m, \not{N}) = m - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[(2m_{\overline{MS}} - x m) L_N \left[\frac{\not{N}^2}{\Delta^2} \right] + (x m - m_{\overline{MS}}) \right] \approx$$

$(m_{\overline{MS}} - m) \sim \mathcal{O}(\alpha) \Rightarrow m_{\overline{MS}} \sim m$

$$\Delta^2(\not{p} \rightarrow m) = (1-x)m_{\overline{MS}}^2 - x(1-x)m^2 \approx m^2(1-x)^2$$

$$m_{\overline{MS}}(\mu) \approx m - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[m(2-x) \text{Ln} \left[\frac{\mu^2}{m^2(1-x)^2} \right] + m(x-1) \right] = m \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(4 + 3 \text{Ln} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right) \right]$$

(eq. 109.1)

↳ "Renormalized Mass (in the \overline{MS} scheme)" ou " \overline{MS} Mass" ou "Running \overline{MS} Mass"

Os esquemas MS podem ser bem convenientes, pois podemos dizer que qualquer observável deve ser independente de μ , e usar:

$$\frac{d}{d\mu} \mathcal{O} = 0 \quad \mathcal{O} \Rightarrow \text{calculado em termos da Lagrangiana que contém } m_{\overline{MS}}(\mu)$$

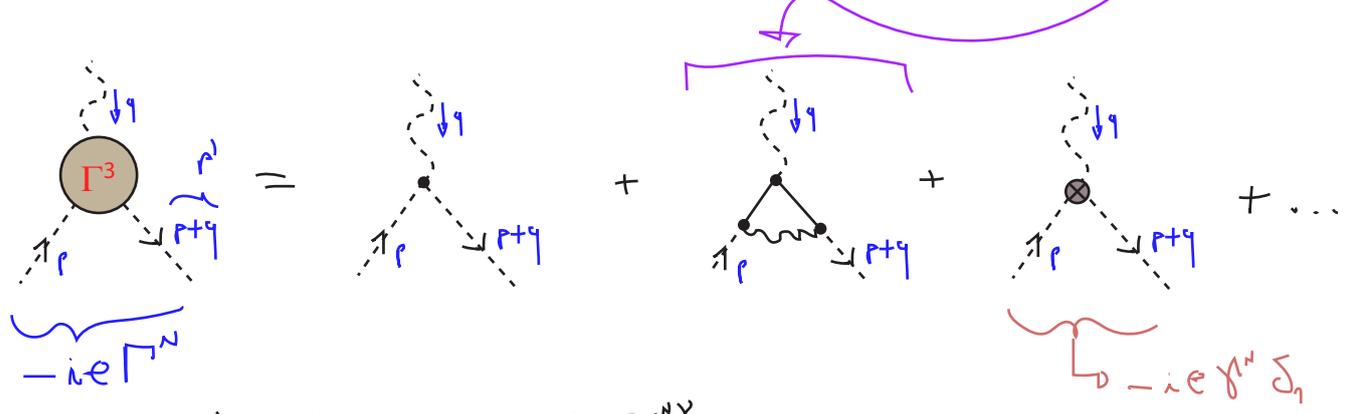
↳ equação diferencial para $m_{\overline{MS}}(\mu)$

Estas equações diferenciais devem valer até mesmo para partículas que não tem uma massa de polo bem definida (e portanto seria difícil escrever 109.1), permitindo que obtenhamos a running mass como solução das mesmas (desde que consigamos alguma condição de contorno que traga informação experimental). Do ponto de vista de interpretação, é bem mais correto pensar nestas massas como constantes de acoplamento para interações com dois campos.

Correções ao Vértice da QED

(Schwartz 17.1,17.2, 19.3 ; Peskin 6.2-6.3, 10.3)

O único diagrama divergente a 1-loop que nos resta calcular é o seguinte que, como vimos na pg 87, contribui para a função de 3 pontos:

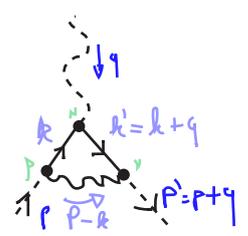


$$(87.1) \Rightarrow \Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

mas é importante notar que, do ponto de vista da renormalização, nosso trabalho já está feito! Calcular a parte divergente deste loop e impor a condição de renormalização 83.2 vai simplesmente fixar δ_1 . No entanto mostramos que as identidades de W.T. implicam que $\delta_1 = \delta_2$ (84.1) e δ_2 já está calculado em 105.2. Por isso gostamos tanto de simetrias!

No entanto ainda há contribuições finitas e divergências IR neste diagrama, que queremos explorar. Como o contratermo δ_1 está multiplicando apenas a estrutura γ^μ , vemos que ele apenas cancela divergências em $F_1(q^2)$, portanto é melhor que $F_2(q^2)$ seja finito (de fato já temos argumentos nessa direção, uma vez que F_2 contribui diretamente para um observável, veja pg 90).

O loop que queremos calcular é (para elétrons on-shell):



(implied +iε in each denominator)

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{i(\not{k}+m)}{(k^2-m^2)} \gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{(k^2-m^2)} \gamma^\rho \frac{-i \not{q} \gamma^\nu \gamma^\rho}{(k-p)^2 - m^2} =$$

$$= -e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{k}+\not{q}+m) \gamma^\mu (\not{k}+m) \gamma^\nu}{\underbrace{(k+q)^2 - m^2}_b \underbrace{(k^2 - m^2)}_a \underbrace{(k-p)^2 - m^2}_c}$$

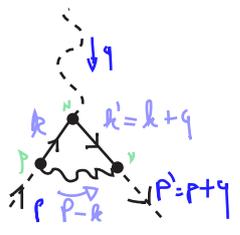
Parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{[(k+q)^2 - m^2](k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xa + yb + zc]^3}$$

$$xa + yb + zc = k^2(x+y+z) + 2k_\nu(yq^\nu - zp^\nu) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 - zm_p^2 =$$

$$\underbrace{(k^\nu + yq^\nu - zp^\nu)^2 - y^2q^2 - z^2p^2 + 2yzq \cdot p}_{l^2} - \underbrace{(y^2 - y - yz)q^2}_{y(1-y-z)q^2} - \underbrace{(z^2 - z - x - y)m^2}_{-(z-1)^2 m^2} = l^2 - \underbrace{(zm_p^2 - 2yq^2 + (1-y)^2 m^2)}_{\Delta_f^2}$$

O numerador exige muita álgebra, que não faremos aqui (os elementos necessários são: as relações em 93.1, lembrar que este elemento sempre aparece entre u(p') e u(p) e a identidade de Gordon, uma versão da conta pode ser encontrada nas notas de campos II de 2016, pgs 118 a 123), para colocar esta contribuição na forma:



$$= -ie \left[\gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2) \right]$$

com (Schwartz 17.27, adaptado para nossas convenções):

$$\delta F_2(q^2) = 8m^2 i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{(l^2 - \Delta_f^2)^3}$$

e (Schwartz 19.50, adaptado para nossas convenções), em Dim. Reg., temos:

$$\delta F_1(q^2) = -2i e^2 N^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{(l^2 - \Delta_\delta^2)^3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(d-2)^2}{d} l^2 - [(d-2)xy + 2yz] q^2 + [2 + 2yz^2 - d(1-z)^2] m^2 \right\}$$

(eq. 111.1)

O cálculo de δF_2 prossegue com a rotação de Wick:

$$\delta F_2(q^2) = -(i)^4 8m^2 e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{(l_E^2 + \Delta_\delta^2)^3} =$$

Feita na eq. 40.1

$$= 8m^2 e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) z(1-z) \frac{1}{32\pi^2 \Delta_\delta^2} =$$

$$= \frac{m^2 \alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{zm_\delta^2 - xyq^2 + (1-z)^2 m^2}$$

(eq. 111.2)

É fácil ver que para $q^2 = 0$ e $m_\gamma = 0$ esta integral é finita:

$$\delta F_2(0) = \frac{m^2 \alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2} =$$

$x = 1 - y - z$
 $0 < x < 1 \Rightarrow -z < y < 1 - z$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617$$

(eq. 111.3) $\uparrow \frac{1}{137}$

Esta é a primeira contribuição para $F_2(0)$, lembre-se que (eq. 90.2):

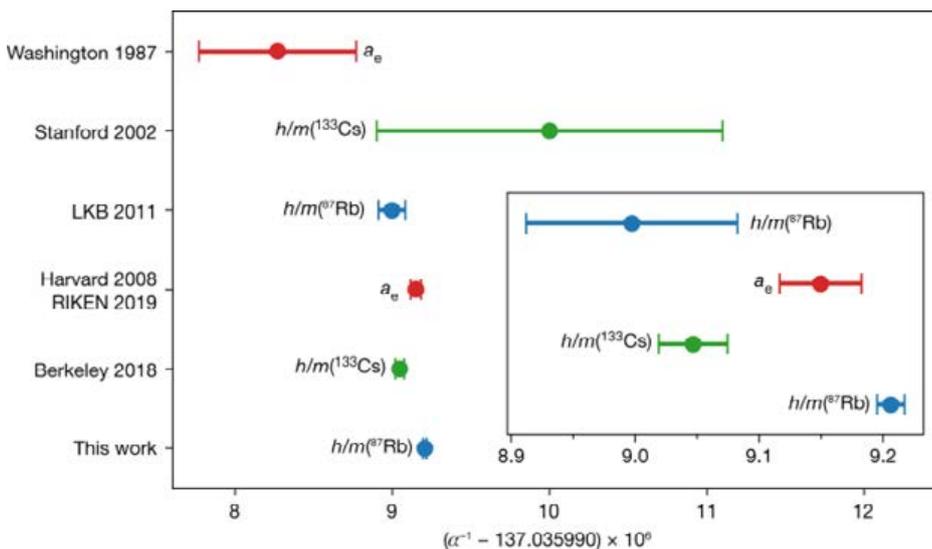
$$F_2(0) = \frac{g-2}{2}$$

O valor mais preciso para esta quantidade já medido é (R.L. Workman et al. (Particle Data Group),

Prog.Theor.Exp.Phys. 2022, 083C01 (2022), <https://pdg.lbl.gov/2022/listings/rpp2022-list-electron.pdf>, pg 2):

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{Exp}} = 0,00115965218073 \quad (28)$$

Por muito tempo esta foi a medida mais precisa que tínhamos na QED, e portanto era daí que era tirado o valor de α (só que ao invés de usar 111.3, era usado um cálculo de ordem α^4), hoje temos outros experimentos mais precisos e o $g-2$ é uma previsão. O verdadeiro teste da QED consiste em comparar diversas medidas independentes que permitem obter o valor de α e testar se "o mesmo α " aparece em todas elas, essencialmente fitando uma variedade de experimentos com apenas um parâmetro livre. Na página 198 do Peskin estão listados 13 medidas independentes (década de 1990). Um resumo da situação hoje pode ser visto no gráfico abaixo:



Morel, L., Yao, Z., Cladé, P. et al. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. Nature 588, 61–65 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>

Podemos testar se δ_1 é realmente igual a δ_2 em ordem 1-loop (dada a nossa incapacidade de aceitar sem desconfiança este presente que a simetria nos deu). Partindo de 111.1, notamos que só a integral com ℓ^2 é divergente, e para ela temos:

$$\begin{aligned}
 & -2ie^2 N^{4-d} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta_0^2)^3} \frac{(d-2)^2}{d} = \\
 & \stackrel{(92.3)}{=} 2e^2 N^{4-d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(2-d)^2}{d} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^{2-\frac{d}{2}} =
 \end{aligned}$$

$$= 2 e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{\mu^{4-d} (2-d)^2}{4 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(\Delta_0^2)^{2-\frac{d}{2}}} =$$

$$\int \frac{l^2}{(k+\Delta)^3} = \frac{2 e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{2}{\epsilon} - 2 + L_N \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta_0^2} \right] \right]$$

(eq. 113.1)

O outro termo é finito no UV, e podemos tomar $d = 4$:

(111.1)

$$\int \frac{1}{(k+\Delta)^3} = -2i e^2 \int_0^1 \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{(l_E^2 + \Delta_0^2)^3} \times$$

$$\times \left\{ - \underbrace{[2xy + 2z]}_{-2(x\gamma + 1-x-\gamma) = -2(1-x)(1-\gamma)} q^2 + \underbrace{[2 + 2z^2 - 4(1-z)^2]}_{-2+2z \rightarrow 2z^2} m^2 \right\} =$$

(40.1)

$$\downarrow$$

$$= +2 e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{32 \pi^2 \Delta_0^2} \left\{ +2(1-x)(1-y) q^2 + 2(1-z+z^2) m^2 \right\}$$

Juntando isso com 113.1:

$$\Delta F_1(q^2) = \frac{2 e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times$$

$$\times \left\{ \frac{2}{\epsilon} - 2 + L_N \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta_0^2} \right] + \frac{1}{\Delta_0^2} \left[(1-x)(1-y) q^2 + (1-z+z^2) m^2 \right] \right\}$$

Lembrando que a condição de renormalização para F_1 é dada por 87.3:

$$F_1(0) = 1$$

Basta somar a contribuição do polo com o contratermo:

$$\delta F_1(q^2=0) + \delta_1 = 0 \quad q^2=0 \Rightarrow \Delta_F(0) = \gamma m_f^2 + (1-\gamma)^2 m^2$$

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) = -\frac{2e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \left\{ \frac{2}{\epsilon} - 2 + L_N \left[\frac{\tilde{N}^2}{\gamma m_f^2 + (1-\gamma)^2 m^2} \right] + \frac{(1-\gamma + \gamma^2) m^2}{\gamma m_f^2 + (1-\gamma)^2 m^2} \right\} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + \int_0^1 dz (1-z) \left[L_N \left[\frac{\tilde{N}^2}{\gamma m_f^2 + (1-\gamma)^2 m^2} \right] + \frac{(1-\gamma + \gamma^2) m^2}{\gamma m_f^2 + (1-\gamma)^2 m^2} \right] \right\}$$

$$\delta_1 \stackrel{m_f \sim 0}{=} -\frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + 3 + L_N \left[\frac{m_f^2}{m^2} \right] + \frac{1}{2} L_N \left[\frac{\tilde{N}^2}{m^2} \right] \right\} \quad (\text{eq. 114.1})$$

que é o mesmo obtido em 105.2, para a vitória das relações de W.T. e a felicidade de todos os envolvidos

Divergência Infravermelha

(Schwartz 20.1)

Para entender como as divergências infravermelhas que apareceram acima interagem e o que elas significam, precisamos olhar um processo físico de fato. Assim veremos que as divergências IR apareceram porque não estávamos sendo suficientemente cuidadosos com nosso observáveis. Vamos escolher um processo simples em QED:



(isso é bem mais simples do que um espalhamento envolvendo só elétrons pois com quatro partículas diferentes temos menos diagramas de Feynman que contribuem, eliminamos os canais t e u)

Em L.O. este processo é dado por apenas um diagrama:

$$\bar{i} M_o = \text{diagrama} = i \frac{e^2}{Q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \quad p^\nu = p_1^\nu + p_2^\nu \rightarrow p^2 = Q^2 \quad Q^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2 = s > 0$$

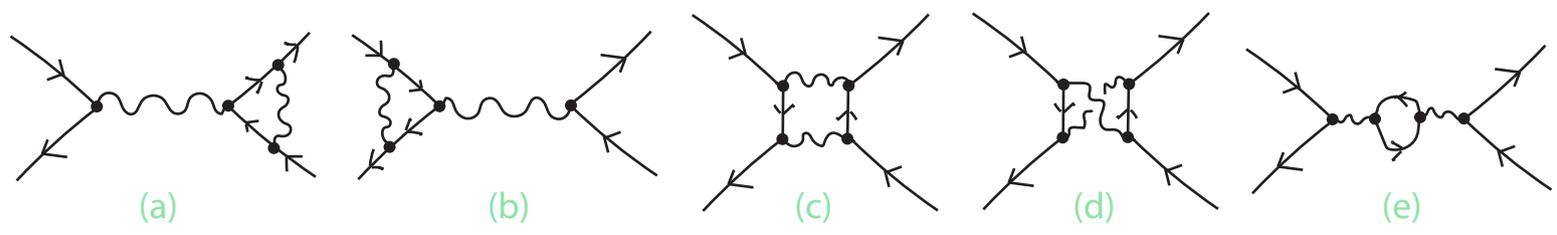
Em TQC I nós estudamos este espalhamento em detalhes (notas de 2020, pgs 205 a 213), e obtivemos:

$$Q^2 \gg m_p, m_e \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{e^4}{(4\pi)^2 E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{eq. 114.2})$$

Basta integrar no ângulo sólido para obter:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} = \frac{e^4}{12\pi E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 115.1})$$

Em ordem 1-loop, temos mais diagramas:



Todos estes diagramas são de ordem α^2 , e é fácil pensar que a secção de choque será ordem α^4 , mas é importante notar que a secção de choque a NLO será dada pela interferência deles com o nível árvore, sendo, portanto, de ordem α^3 :

$$|\mathcal{M}|^2 = \left| \underbrace{M_0}_{\mathcal{O}(\alpha)} + \underbrace{M_2}_{\mathcal{O}(\alpha^2)} + \dots \right|^2 = \underbrace{|M_0|^2}_{\mathcal{O}(\alpha^2)} + \underbrace{M_0 M_2^* + M_2^* M_0}_{\mathcal{O}(\alpha^3)} + \underbrace{|M_2|^2 + \dots}_{\mathcal{O}(\alpha^4)}$$

Para simplificar a conta, podemos também lembrar que não há razão (na QED) para que o elétron e o múon tenham a mesma carga. A secção de choque será um polinômio nas cargas, e se podemos mudar as cargas arbitrariamente, somas e cancelamentos entre diagramas devem acontecer somente entre termos com as mesmas potências das cargas. Os diagramas acima tem dependências diferentes:

- (a) $Q_e Q_\mu^3$
 - (b) $Q_e^3 Q_\mu$
 - (c) $Q_e^2 Q_\mu^2$
 - (d) $Q_e^2 Q_\mu^2$
 - (e) $Q_e Q_\mu Q_x^2$
- soma sobre tudo que puder passar naquele loop

Por simplicidade, nós vamos focar no caso (a). Em princípio há um diagrama em (e) que é de ordem $Q_e Q_\mu^3$ (basta colocar o múon no loop), mas já vimos que a auto-energia do fóton tem apenas o efeito de alterar a carga efetiva, e de qualquer forma era finita (no IR, que é o que queremos olhar aqui). Precisamos então calcular o seguinte (lembrando que temos também contratermos):

$$i\mathcal{M}_T = \text{diagram (a)} + \text{diagram (c)} = i \frac{e^2}{Q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \Gamma_{2\mu}(p) \psi(p_3) \psi(p_4)$$

O que chamamos de Γ_2 aqui já é um conhecido nosso:

(87.1) }
$$T_2^\nu(p) = \underbrace{\delta F_1(p^2)}_{\mathcal{O}(\alpha^4)} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_\nu} p_\nu \underbrace{\delta F_2(p^2)}_{\mathcal{O}(\alpha^4)} + \delta_1 \gamma^\nu$$
 (eq. 116.1)

(pg 111.2)

$$\delta F_2(p^2) = \frac{m_\nu^2 \alpha}{11\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{-xy p^2 + (1-z)^2 m_\nu^2}$$

$$\lim_{\frac{p^2}{m_\nu^2} \rightarrow \infty} \delta F_2(p^2) = 0$$

Nós calculamos δF_1 usando Dim. Reg., mas aqui é mais instrutivo usar o que teríamos obtido usando Pauli-Villars junto com a massa fictícia do fóton (o que deixa as escalas UV e IR mais evidentes). Não faremos tudo de novo, mas isto está feito no Schwartz, pgs 348 e 349 (e com detalhes nas notas de TQC II de 2016, terminando na eq. 123.3):

$$\delta F_1(Q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \text{Ln} \left[\frac{z \Lambda^2}{\Delta_0^2} \right] + \frac{p^2(1-x)(1-y) + m_\nu^2(1-z)^2}{\Delta_0^2} \right\} =$$

Pauli-Villars $\Delta_0^2 = z m_\nu^2 - xy p^2 + (1-z)^2 m_\nu^2$

ULTRA-REL: $m_\nu \rightarrow 0$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \text{Ln} \left[\frac{z \Lambda^2}{z m_\nu^2 - xy Q^2} \right] + \frac{Q^2(1-x)(1-y)}{z m_\nu^2 - xy Q^2} \right\}$$
 (eq. 116.2)

Novamente temos:

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m_\nu^2} \right] = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2} \text{Ln} \left[\frac{\Lambda^2}{m_\nu^2} \right] \right)$$
 (eq. 116.3)

que pode ser comparado com o que obtivemos em 114.1, basta fazer $m \rightarrow 0$ na integral anterior a 114.1 e integrar de novo:

$$\int_1^{\text{Dim. REG}} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{G} - 1 \right) + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \text{Ln} \left[\frac{\tilde{\nu}^2}{m_0^2} \right] \right\} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} + \text{Ln}[\tilde{\nu}^2] - \text{Ln}[m_0^2] \right]$$
 (114.1)

Usando o dicionário P.V. <-> Dim. Reg.:

$$\int_1^{Dim. REG} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} + L_N[\tilde{\mu}^2] - L_N[m_f^2] \right] \leftrightarrow \int_1^{P.V.} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[L_N[\Lambda^2] - L_N[m_f^2] \right]$$

Vemos que os dois contratermos são compatíveis novamente com o dicionário obtido em 51.2, mas que na expressão de P.V. temos explícitas as escalas que divergem no UV e no IR. Voltando ao cálculo de δF_1 :

$$\delta F_1(Q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ L_N \left[\frac{(1-x-y)\Lambda^2}{(1-x-y)m_f^2 - \kappa y Q^2} \right] + \frac{Q^2(1-x)(1-y)}{(1-x-y)m_f^2 - \kappa y Q^2} \right\}$$

O primeiro termo (que é divergente no UV), é finito no IR, e tomando $m_f \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy L_N \left[\frac{(1-x-y)\Lambda^2}{-\kappa y Q^2} \right] = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} L_N \left(\frac{\Lambda^2}{-Q^2} \right) \right]$$

A parte divergente vai ser cancelada exatamente por δ_1

O segundo termo é divergente no IR e finito no UV, aqui precisamos lembrar do ie para evitar um polo em Q^2 ($Q^2 \rightarrow Q^2 + i\epsilon$):

$$\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Q^2(1-x)(1-y)}{(1-x-y)m_f^2 - \kappa y Q^2 - i\epsilon} = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - 2 L_N \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} + O(m_f) \right\}$$

de forma que:

$$\delta F_1(Q^2) + \delta_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{3}{2} + L_N \left(\frac{\Lambda^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) + L_N \left[\frac{m_f^2}{\Lambda^2} \right] - L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - 4 L_N \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{10}{2} \right\}$$

$$\delta F_1(Q^2) + \delta_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - 3 L_N \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{7}{2} \right\}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_N(-Q^2 - i\epsilon) = L_N Q^2 - i\pi \Rightarrow \begin{aligned} L_N \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) &= L_N \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) + i\pi \\ -L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right) &= - \left(L_N \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) + i\pi \right)^2 = -L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) - 2i\pi L_N \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) + \pi^2 \end{aligned}$$

$$\delta F_1(Q^2) + \delta_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -L_N^2 \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) - (3 + 2i\pi) L_N \left(\frac{m_f^2}{Q^2} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2} - 3i\pi \right\}$$

Para calcular a secção de choque queremos saber:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |M|_{\text{NLO}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} (M_{\Gamma}^+ M_o + M_o^+ M_{\Gamma}) =$$

$$M_{\Gamma} = i \frac{e^2}{Q^2} \bar{v}(p_2) \gamma_{\mu}^{\nu} u(p_1) \bar{u}(p_3) \Gamma_{2\nu}^{\mu}(p) v(p_4)$$

$$M_o = i \frac{e^2}{Q^2} \bar{v}(p_2) \gamma_{\mu}^{\nu} u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_{\mu}^{\nu} v(p_4)$$

$$M_{\Gamma}^+ = -i \frac{e^2}{Q^2} \bar{u}(p_1) \gamma_{\mu}^{\nu} v(p_2) \bar{v}(p_4) \Gamma_{2\nu}^{\mu}(p) u(p_3)$$

$$M_o^+ = -i \frac{e^2}{Q^2} \bar{u}(p_1) \gamma_{\mu}^{\nu} v(p_2) \bar{v}(p_4) \gamma_{\mu}^{\nu} u(p_3)$$

$$\sum_{\text{SPINS}} M_{\Gamma}^+ M_o = \frac{e^4}{Q^4} \sum_{\text{SPINS}} \underbrace{\bar{u}(p_1) \gamma_{\mu}^{\nu} u(p_3)}_{\beta_1} \underbrace{\bar{v}(p_2) \gamma_{\mu}^{\nu} v(p_4)}_{\beta_2} \underbrace{\bar{v}(p_4) \Gamma_{2\nu}^{\mu}(p) u(p_3)}_{\beta_3} \underbrace{\bar{u}(p_3) \gamma_{\mu}^{\nu} u(p_1)}_{\beta_4} = \frac{e^4}{Q^4} \text{Tr}[\beta_1 \gamma^{\nu} \beta_2 \delta^{\nu\mu}] \text{Tr}[\beta_4 \Gamma_{2\nu}^{\mu}(p) \beta_3 \gamma_{\mu}^{\nu}]$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |M|_{\text{NLO}}^2 = \frac{e^4}{4Q^4} \text{Tr}[\beta_1 \gamma^{\nu} \beta_2 \delta^{\nu\mu}] \text{Tr}[\beta_4 \Gamma_{2\nu}^{\mu}(p) \beta_3 \gamma_{\mu}^{\nu}] + c.c.$$

$$(116.1) \rightarrow \text{Tr} \left\{ \beta_4 \left[(\delta F_1(Q^2) + \delta_1) \gamma_{\nu} + \delta F_2 \sigma_{\nu\mu} \right] \beta_3 \gamma_{\mu}^{\nu} \right\}$$

trace with odd number of γ 's

$$= (\delta F_1(Q^2) + \delta_1)^* \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |M_o|^2}_{\frac{e^4}{4Q^4} \text{Tr}[\beta_1 \gamma^{\nu} \beta_2 \delta^{\nu\mu}] \text{Tr}[\beta_4 \gamma_{\nu} \beta_3 \gamma_{\mu}^{\nu}]} + c.c. = 2 \text{Re}[\delta F_1(Q^2) + \delta_1] \frac{1}{4} \sum |M_o|^2$$

esta correção depende só de Q_2 (ou E_{CM}) e portanto sai multiplicando também a secção de choque

$$\therefore \sigma_{\text{NLO}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 2 \text{Re}[\delta F_1(Q^2) + \delta_1] \sigma_{\text{LO}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (118.1)$$

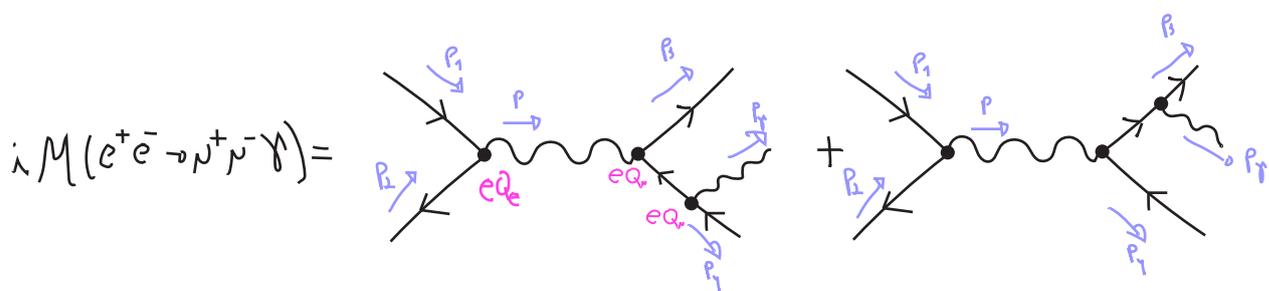
$$\sigma_{\text{NLO}}(Q_1^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -L_N^2 \left(\frac{m_{\mu}^2}{Q_1^2} \right) - 3 \text{Ln} \left(\frac{m_{\mu}^2}{Q_2^2} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2} \right\} \sigma_{\text{LO}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \sim \alpha Q_1^2 \left(\alpha^2 Q_2^2 Q_1^2 \right) = \alpha^3 Q_1^4 Q_2^2$$

(117.1) Sudakov Double Logarithm

Note que: $\sigma_{\text{NLO}}(Q_1^2) - \sigma_{\text{NLO}}(Q_2^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -L_N^2 \left(\frac{m_{\mu}^2}{Q_1^2} \right) + L_N^2 \left(\frac{m_{\mu}^2}{Q_2^2} \right) - 3 \text{Ln} \left(\frac{Q_2^2}{Q_1^2} \right) \right\} \sigma_{\text{LO}}$

Regulador IR não some

Ou seja, parece que temos um problema, uma vez que isto diverge quando levamos o regulador IR para zero e, supostamente, é observável (!?!?). O nosso erro está justamente nesta última afirmação, o ponto é que talvez assumir que **sempre podemos diferenciar** a produção de dois múons de "outros" eventos está errado. Considere o espalhamento a seguir:



$$i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) =$$

Estes diagramas também têm secção de choque proporcional a: $e^6 Q_e^4 Q_e^2 = \alpha^3 Q_e^4 Q_e^2$

e cabe a pergunta: o que acontece quando o fóton que coloquei a mais tem momento (e energia) bem baixos ou sai na mesma direção do múon. Isto não pode ser confundido com o caso só com dois múons? Vejamos o que é obtido no limite ultra-relativístico:

$$i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) = i \frac{e^2}{Q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) S^\nu v(p_4) \epsilon_\alpha^*$$

$$S^{\mu\nu} \equiv -i e \left[\gamma^\mu \frac{i}{p_3 + p_4} \gamma^\nu - \gamma^\nu \frac{i}{p_1 + p_2} \gamma^\mu \right] \quad (\text{eq. 119.1})$$

a secção de choque é portanto:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) = \frac{1}{2Q^2} \int d\mathcal{T}_{PS} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2Q^6} L^{\mu\nu} X_{\mu\nu}$$

integral no espaço de fase

$$d\mathcal{T}_{PS} \equiv \prod_{j=3,4,\gamma} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$$

(eq. 119.2)

onde L contém a parte do elétron inicial:

$$L^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS } e} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] = p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - \frac{1}{2} Q^2 g^{\mu\nu}$$

(eq. 119.3)

e X tem a parte do múons + 1 fóton:

$$X^{\mu\nu} \equiv \int d\mathcal{T}_{PS} \sum_{\substack{\text{SPINS } \mu \\ \text{POL. } \gamma}} \bar{u}(p_3) S^{\mu\alpha} v(p_4) \bar{v}(p_4) S^{\beta\nu} u(p_3) \epsilon_\alpha \epsilon_\beta^* = - \int d\mathcal{T}_{PS} \text{Tr} [\not{p}_3 S^{\mu\alpha} \not{p}_4 S^{\beta\nu} \not{\epsilon}_\alpha \not{\epsilon}_\beta^*]$$

(eq. 119.4)

As identidades de Ward nos dizem que (basta cortar o fóton intermediário):

$$p^\mu L_{\mu\nu} = p^\nu X_{\mu\nu} = 0$$

E sabemos que X é só função de p (p3, p4 e pγ estão integrados), portanto a forma mais geral para X é:

$$X^{\mu\nu} \equiv (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) X(p^2) \Rightarrow X(p^2) = -\frac{1}{3p^2} g^{\mu\nu} X^{\mu\nu}$$

(eq. 119.5)

Logo:

$$g_{\mu\nu} X^{\mu\nu} = (p^2 - 4p^2) X(p^2)$$

$$L^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} = \left[p_1^\nu p_2^\sigma + p_1^\sigma p_2^\nu - \frac{1}{2} Q^2 g^{\nu\sigma} \right] (p_\nu p_\sigma - p^2 g_{\nu\sigma}) \times (p^2) = Q^4 X(Q^2)$$

(119.3) $p = p_1 + p_2 \quad p^2 = Q^2 \quad p_{1,2} \cdot p = \cancel{p_{1,2}^2} + p_1 \cdot p_2$

$Q^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) = \cancel{p_1^2} + 2 p_1 \cdot p_2 + \cancel{p_2^2} \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow p_{1,2} \cdot p = \cancel{p_{1,2}^2} + p_1 \cdot p_2 = \frac{Q^2}{2}$
 no limite ultra-relat.

$$L^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} = -\frac{Q^2}{3} g^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} \quad (\text{eq. 120.1})$$

(119.5)

$$\mathcal{D}_{L_0}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{e^4}{12\pi Q^2}$$

(eq. 115.1)

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma) = \frac{e^7}{2Q^6} L^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} = -\frac{e^4}{6Q^4} g^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} = \left(-\frac{2\pi}{Q^2} g^{\nu\sigma} X_{\nu\sigma} \right) \mathcal{D}_{L_0}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

(eq. 120.2)

Deixando a integral sobre o espaço de fase em X, acabamos com algo que é equivalente a um decaimento de um "fóton massivo", de massa Q²:

$$\Gamma(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma) = -\frac{e^2}{2Q} g_{\nu\sigma} X^{\nu\sigma}$$

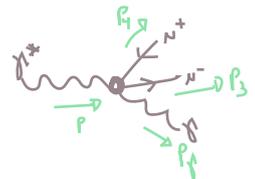
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma) = \left(\frac{4\pi}{e^2 Q} \Gamma(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma) \right) \mathcal{D}_{L_0}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

(eq. 120.3)

Este fator é dado por: $\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^*)$ (119.4)

Agora só resta calcular o decaimento em 3 corpos: $\Gamma(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma) = \frac{e^2}{2Q} \int d\Gamma_{PS} \text{Tr} \left[\not{p}_3 S^{\text{not}} \not{p}_4 S_{\mu\nu} \right]$

O espaço de fase fica mais tratável em termos das variáveis:

$$\begin{cases} s \equiv (p_3 + p_4)^2 \equiv Q^2(1 - x_3) \\ t \equiv (p_3 + p_\mu)^2 \equiv Q^2(1 - x_1) \\ u \equiv (p_4 + p_\mu)^2 \equiv Q^2(1 - x_2) \end{cases}$$


(Schwartz, pg 362)

E dá para mostrar que no ref. de repouso do γ^* (exercício):

$$p^\nu = (Q, 0, 0, 0)$$

$$\int d\Gamma_{PS} = \frac{Q^2}{128\pi^3} \int_0^{1-\beta} dx_1 \int_{1-x_1-\beta}^{1-\frac{\beta}{1-x_1}} dx_2 \quad \beta \equiv \frac{m_\mu^2}{Q^2}$$

(eq. 120.4)

$$x_1 = 1 - \frac{(p_3 + p_\mu)^2}{Q^2} = 1 - \frac{(p - p_4)^2}{Q^2} = 1 - \frac{p^2 - 2p \cdot p_4 + p_4^2}{Q^2} = \frac{2E_4}{Q}$$

$$x_2 = 2 \frac{E_3}{Q}$$

E também (exercício):

$$\overline{\text{Tr}} [P_3 S^{12} P_1 S_{21}] = \frac{8e^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \left\{ x_1^2 + x_2^2 + \beta \left[2(x_1 + x_2) - \frac{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + 2\beta^2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 121.1})$$

A parte divergente vem do termo que sobra quando $m_\gamma \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) &= \frac{e^2}{2Q} \frac{Q^2}{32\pi^3} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{8e^2}{(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 + x_2^2) = \\ &= \frac{e^4 Q}{32\pi^3} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{(1-x_1)(1-x_2)} \end{aligned}$$

Dá para ver que a integral diverge quando um dos dois "x" chega em 1. Lembrando da definição dos x:

$$\begin{aligned} (P_3 + P_\gamma)^2 &\equiv Q^2(1-x_1) \rightarrow x_1=1 \Rightarrow (P_3 + P_\gamma)^2 = 0 \Rightarrow \overset{\text{ref de repouso: } p^\mu = (Q, 0, 0, 0)}{E_4 \sim \frac{Q}{2}} \ \& \ (P_3 + P_\gamma)^\mu \sim \left(\frac{Q}{2}, 0, 0, -\frac{Q}{2}\right) \\ (P_1 + P_\gamma)^2 &\equiv Q^2(1-x_2) \rightarrow x_2=1 \Rightarrow (P_1 + P_\gamma)^2 = 0 \Rightarrow E_3 \sim \frac{Q}{2} \ \& \ (P_1 + P_\gamma)^\mu \sim \left(\frac{Q}{2}, 0, 0, -\frac{Q}{2}\right) \end{aligned}$$

Tome este segundo caso como exemplo (tudo é idêntico no outro caso, trocando μ^+ por μ^-), o μ^- está levando a fração máxima possível de energia ($x_2 = 1, E_3 = Q/2$), forçando o μ^+ a recuar junto com o fóton na direção oposta. Neste caso:

$$(P_1 + P_\gamma)^2 = 0 \Rightarrow P_1 \cdot P_\gamma = E_4 E_\gamma (1 - \cos(\theta)) = 0$$

- Só pode ser satisfeito em dois casos: (I) $E_\gamma \sim 0$ **Soft Singularity**
- (II) $\cos(\theta) \sim 0$ **Collinear Singularity**

(em princípio também poderíamos ter $E_4 = 0$, mas isso é um artefato da aproximação ultra relativística que nos fez desprezar a massa do múon)

Estas são em geral as origens de divergências IR. Pegando os leading terms em β , teríamos obtido:

$$\Gamma(\gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) = \frac{Q e^4}{32\pi^3} \left\{ L_N^2 \left(\frac{m_\mu^2}{Q^2} \right) + 3 L_N \left(\frac{m_\mu^2}{Q^2} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 5 \right\} \quad (\text{eq. 121.2})$$

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left\{ L_N^2 \left(\frac{m_\mu^2}{Q^2} \right) + 3 L_N \left(\frac{m_\mu^2}{Q^2} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 5 \right\} \sigma_{L_0}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (\text{eq. 121.3})$$

Agora basta comparar 121.3 com 118.2 para ver que:

$$\sigma_{N_{Lo}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) + \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$$

$$\sigma_{TOT} = \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) + \sigma_{N_{Lo}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) + \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

$$\sigma_{TOT}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) = \left(1 + \frac{3\alpha}{4\pi}\right) \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad (\text{eq. 122.1})$$

↳ quer este cara seja observado ou não

Que é finita! A inclusão de **final state radiation** corrigiu o problema. Neste caso não distinguimos a presença de um fóton ou não. Em situações mais realistas teremos um detector que fará esta diferença **desde que o fóton tenha energia suficiente** para “acender” o detector **e esteja suficientemente isolado do múon**. Neste caso teríamos obtido:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \sigma_{Lo}(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left[L_N \left(\frac{1}{\Theta_{EXP}} \right) \left(L_N \left(\frac{Q}{2E_{EXP}} - 1 \right) - \frac{3}{4} + 3 \frac{E_{EXP}}{Q} \right) + \dots \right] \right\}$$

↳ Sem fótons (isolados), e o “μ” pode ser um “jato μ+γ” (na definição de Stermann-Weinberg)

Onde: $\left\{ \begin{array}{l} E_{EXP} \rightarrow \text{energia mínima medida pelo detector} \\ \Theta_{EXP} \rightarrow \text{resolução angular do detector (ângulo entre o fóton e o múon)} \end{array} \right.$

são os reguladores IR! Poderíamos ter usado estes em lugar de m_γ , mas a conta seria bem mais complicada. O fato **estes cortes IR são físicos**, dados pelo fato de que nenhum experimento consegue medir energia arbitrariamente pequenas nem tem resolução angular infinita e, portanto, todas as secções de choque são finitas. Por outro lado, em algumas situações experimentais (experimentos sensíveis), estes logs para a produção de soft-particles podem crescer tanto que “ganham” a expansão perturbativa e é necessário ir além do que estamos fazendo aqui, é preciso ressonar os logs de Sudakov e usar teorias efetivas (**Soft-Collinear Effective Theory**).

O teorema óptico

(Schwartz 24.1; Peskin 7.3; Nastase 21)

Antes de passarmos para uma visão mais sofisticada da renormalização, faremos um “interlúdio” para provar um teorema importante e ver como trataríamos propagadores e massas de partículas instáveis (uma vez que até agora assumimos implicitamente na renormalização da massa que estávamos falando sempre dos estados mais leves da teoria, que eram por consequência estáveis).

O **teorema óptico** é consequência direta de um dos componentes mais básicos de uma teoria quântica, a **unitariedade**. Precisamos que a probabilidade se conserve, de forma que em qualquer momento a probabilidade somada sobre tudo que pode acontecer continue sendo 1. No quadro de Schroedinger isso se traduz em uma condição sobre a normalização dos estados:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle \\ |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle \\ |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle \end{aligned}} \right\} \rightarrow \boxed{H^\dagger = H}$$

e, em termos da matriz S, implica que:

$$S = e^{-iHt} \Rightarrow \boxed{S^\dagger S = 1} \quad (\text{eq. 123.1})$$

Lembrando das definições que temos usado para a matriz de espalhamento, isso implica que:

$$S = 1 + iT \quad \longrightarrow \quad (1 + iT)^\dagger (1 + iT) = 1$$

$$\boxed{i(T^\dagger - T) = T^\dagger T} \quad (\text{eq. 123.2})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle p | i(T^\dagger - T) | i \rangle &= \langle p | T^\dagger T | i \rangle \\ \uparrow &= \sum_X \int d\pi_X |X\rangle \langle X| \quad \Rightarrow \quad d\pi_X \equiv \prod_{j \in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \end{aligned}$$

$|X\rangle = |p_1, p_2, \dots, p_j\rangle$

$$i \langle p | T^\dagger | i \rangle - i \langle p | T | i \rangle = \sum_X \int d\pi_X \langle p | T^\dagger | X \rangle \langle X | T | i \rangle$$

$$\langle p | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(\sum p_i - \sum p_f) i M(i \rightarrow p)$$

$$i (2\pi)^4 \delta(\sum p_i - \sum p_f) [M^*(p \rightarrow i) - M(i \rightarrow p)] =$$

$$= \sum_X \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta(\sum p_i - \sum p_x) M^*(p \rightarrow X) (2\pi)^4 \delta(\sum p_i - \sum p_x) M(i \rightarrow X)$$

a outra delta força $\sum p_x = \sum p_i$

Teorema Óptico Generalizado

$$\boxed{M(i \rightarrow p) - M^*(p \rightarrow i) = i \sum_X \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta(\sum p_i - \sum p_x) M(i \rightarrow X) M^*(p \rightarrow X)} \quad (\text{eq. 123.3})$$

Note que temos $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}(\mu) \text{ do lado esquerdo} \\ \mathcal{O}(\mu^2) \text{ do lado direito} \end{array} \right.$

Mas em teoria de perturbação isto terá que ser satisfeito ordem a ordem, o que quer dizer que lado esquerdo da equação terá que ser calculado em ordem superior ao direito. Por exemplo:

$$\underbrace{M}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} - \underbrace{M^*}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} = \sum \int \underbrace{M M^*}_{\mathcal{O}(\lambda^4)}$$

o que significa em particular que diagramas em nível árvore do lado direito estarão relacionados a diagramas com 1-loop do lado esquerdo (e **precisamos de loops para satisfazer a unitariedade**). Um caso especial importante do teorema óptico é obtido quando os estados finais e iniciais são iguais:

$|i\rangle = |f\rangle = |A\rangle$

(eq. 123.3) \rightarrow $2i \text{Im} [M(A \rightarrow A)] = i \sum_X \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_A - \sum p_X) |M(A \rightarrow X)|^2$ (eq. 124.1)

Em particular, quando A é um estado de uma partícula, a transição $A \rightarrow X$ é o decaimento no canal X. Obtivemos a expressão para a largura de decaimento em TQC I (eq. 79.2 das notas de 2020):

$$\Gamma(A \rightarrow X) = \frac{1}{2m_A} \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_A - \sum p_X) |M(A \rightarrow X)|^2$$

(eq. 124.2)

esta é a largura parcial no canal X, mas se somarmos sobre todos canais possíveis obtemos a total, e é praticamente isto que já está na eq 124.1:

$$\text{Im} [M(A \rightarrow A)] = m_A \sum_X \Gamma(A \rightarrow X) \equiv m_A \Gamma_{\text{TOT}}$$

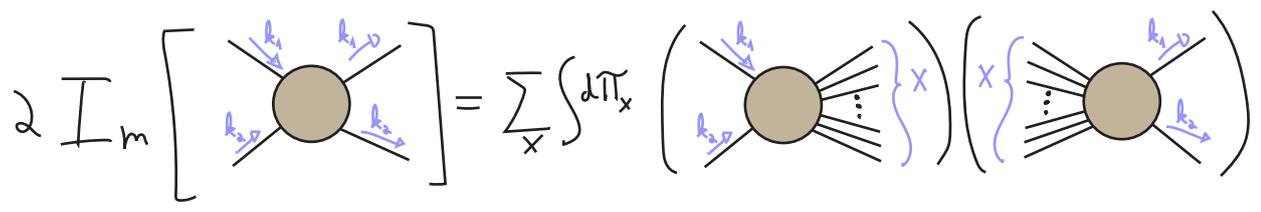
(eq. 124.3)

Note que obtivemos um observável (a largura total, que é o inverso do tempo de vida) de um lugar pouco intuitivo: da parte imaginária da transição $1 \rightarrow 1$, ou seja, do propagador completo.

No caso em que A é um estado de duas partículas: $|A\rangle = |k_1, k_2\rangle$

(eq. 124.1) \Rightarrow $2i \text{Im} [M(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2)] = \sum_X \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2 - \sum p_X) |M(k_1, k_2 \rightarrow X)|^2$

que em termos de diagramas assume uma forma bem sugestiva:



Note que a parte imaginária do diagrama da esquerda pode ser calculada trocando os propagadores intermediários por estados on-shell, efetivamente **cortando o loop** para obter os dois diagramas da direita (e a soma em X nos diz que fazemos isto de todas as formas possíveis)

Podemos então usar a expressão do espalhamento $2 \rightarrow n$:

Basta usar eq. 77.2 de TQC I - 2020, e lembrar que no ref do CM:

$$2E_1 2E_2 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2| = 4E_1 E_2 \left(\frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|}{E_1 E_2} \right)^{1/2} 4E_1 E_2 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|$$

$$\sigma(k_1, k_2 \rightarrow X) = \frac{1}{4 E_{cm} |\vec{k}_{1,cm}|} \int d\pi_X (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_a - \sum p_x) |\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow X)|^2$$

e obter o Teorema Óptico propriamente dito:

$$\text{Im} \left[\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) \right] = 2 E_{cm} |\vec{k}_{1,cm}| \sum_X \sigma(k_1, k_2 \rightarrow X) \quad (\text{eq. 125.1})$$

O teorema óptico generaliza um fato que já apareceu em alguns casos neste curso: a de que loops desenvolvem uma parte imaginária na região em que as partículas intermediárias entram na camada de massa. Isso leva inclusive a um método para obter a parte imaginária de diagramas, que consiste essencialmente em "cortar" loops, colocando os propagadores intermediários na camada de massa através da substituição:

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2i\pi \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) \quad (\text{eq. 125.2})$$

isto é chamado de Regras de Corte de Cutkosky que não cobriremos com detalhe aqui, mas que está com detalhes em Schwartz (sec 24.1.2) e Peskin (7.3, pgs 236). Conceitualmente, esta substituição nos dá a descontinuidade da função obtida como resultado do loop, conforme passamos de um lado para o outro de um Branch Cut no plano complexo e sabemos que estes Branch Cuts são criados quando temos estados intermediários de 2 ou mais partículas livres (on-shell) sendo produzidos.

Taxa de decaimento a partir do teorema óptico

Vejamos um exemplo, considere a Lagrangiana com dois campos escalares:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2}_{\dots\dots\dots = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - \frac{m^2}{2} \pi^2}_{\dots\dots\dots = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} + \frac{\lambda}{2} \phi \pi^2$$

Considere a amplitude $\phi \rightarrow \phi$, em ordem λ^2 :

$$i\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2) = \text{diagram} = \frac{1}{2} (i\lambda)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \text{diagram} = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \text{L}_N \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - p^2 x(1-x) - i\epsilon} \right)$$

all the usual Pauli-Villars shenanigans (check!)

Como neste caso estamos interessados no caso em que o ϕ está on-shell, temos $p^2 = M^2$:

$$M_{\text{Loop}}(\phi \rightarrow \phi) = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx L_N\left(\frac{m^2 - M^2 x(1-x) - i\epsilon}{\Lambda^2}\right)$$

Há duas regiões distintas:

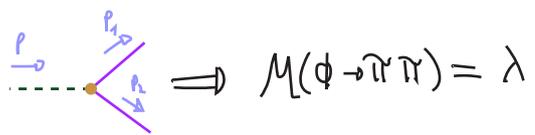
$M < 2m \rightarrow m^2 - M^2 x(1-x) > 0 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} [M_{\text{Loop}}] = 0$
 $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$
 $L_N(-A - i\epsilon) = L_N A - i\pi \xrightarrow{A > 0}$

$M > 2m \rightarrow m^2 - M^2 x(1-x)$ pode ser negativo em alguma região de x

$L_N\left(\frac{m^2 - M^2 x(1-x) - i\epsilon}{\Lambda^2}\right) = L_N\left(\frac{M^2 x(1-x) - m^2}{\Lambda^2}\right) - i\pi$
 $\text{Im} [L_N(\text{shaded})] = (-i\pi) \Theta[M^2 x(1-x) - m^2]$

$$\text{Im} [M_{\text{Loop}}(\phi \rightarrow \phi)] = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \Theta[M^2 x(1-x) - m^2] = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{M^2}} \Theta[M - 2m] \quad (\text{eq. 126.1})$$

Se calcularmos a largura de decaimento (1 → 2) diretamente:



$$\Gamma(\phi \rightarrow \pi\pi) = \frac{1}{2} \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) |M(\phi \rightarrow \pi\pi)|^2 =$$

estados finais indistinguíveis

$\mathcal{R}_{\text{EF}}: p = (M, 0, 0, 0)$
 $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad E_1 = E_2$
 $|\vec{p}_1|^2 = \left(\frac{M}{2}\right)^2 - m^2$

$$= \frac{\lambda^2}{4M} \int \frac{d\Omega}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|^2}{M} \Theta(M - 2m) = \frac{\lambda^2}{32\pi M} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{M^2}} \Theta(M - 2m) \quad (\text{eq. 126.2})$$

que é exatamente a eq. 126.1 dividida por M, mostrando que o teorema óptico (em 124.3) vale a esta ordem.

Partículas Instáveis

Como já vimos (pg 22), o propagador completo (na teoria renormalizada) é dado por:

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)}$$

$-iM^2 = \text{PI}$

No entanto até agora, no esquema on-shell, impusemos que a massa física (ou "massa de polo") era dada por:

$$m^2 + M^2(m^2) = m^2 \Rightarrow M^2(m^2) = 0$$

o que implica: $\text{Re} [M^2(m^2)] = 0$ & $\text{Im} [M^2(m^2)] = 0$

Agora sabemos, no entanto, que para partículas instáveis a **parte imaginária não pode ser zero sob pena de violar o teorema óptico**. Em outras palavras, não podemos dar uma parte imaginária para o contratérmo (que eliminaria $\text{Ln}[M^2]$) sem detonar a unitariedade da teoria (outra forma de ver isso é que se você voltar em uma das Lagrangianas com contratérmos e torná-los complexos, vai acabar com uma Lagrangiana não-Hermitiana). Temos portanto que generalizar nossa condição de renormalização:

$$\text{Diagrama} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \text{Re}[M^2(p^2)] - i \text{Im}[M^2(p^2)]}$$

Real Pole Mass
ou
Breit-Wigner Mass

$$m^2 + \text{Re}[M^2(m^2)] = m^2 \Rightarrow \text{Re}[M^2(m^2)] = 0 \quad (\text{eq. 127.1})$$

Imagine que este propagador apareça em um diagrama no canal s, a secção de choque resultante se comportaria como:

$$\sigma(\text{Diagrama}) \sim \left| \frac{i}{s - m^2 - i \text{Im}[M^2(s)]} \right|^2 \quad (\text{eq. 127.2})$$

que é uma distribuição com um pico em $s = m^2$, e uma certa largura. Se esta largura for bem pequena comparada com m , então podemos assumir que toda a contribuição vem desta região, trocando:

$$\text{Im}[M^2(s)] \simeq \text{Im}[M^2(m^2)]$$

e identificar esta com uma distribuição de Breit-Wigner, fazendo:

$$\text{Im}[M^2(m^2)] = -m \Gamma \quad (\text{eq. 127.3})$$

$$\sigma(\text{Diagrama}) \sim \left| \frac{i}{s - m^2 + i m \Gamma_{\text{TOT}}} \right|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + (m \Gamma_{\text{TOT}})^2}$$

bom se: $m \Gamma_{\text{TOT}} \ll m^2 \Rightarrow \Gamma_{\text{TOT}} \ll m$

No que a equação 127.3 é equivalente a só considerar os diagramas 1PI no lado esquerdo de 124.3

$$(124.3) \Rightarrow \Gamma_{\text{TOT}} = \frac{1}{m} \text{Im} \left[\mathcal{M}(1 \rightarrow 1) = -M^2(m^2) + \text{Non 1PI} \right]$$

$$\Gamma_{\text{TOT}} \simeq -\frac{1}{m} \text{Im}[M^2(m^2)]$$

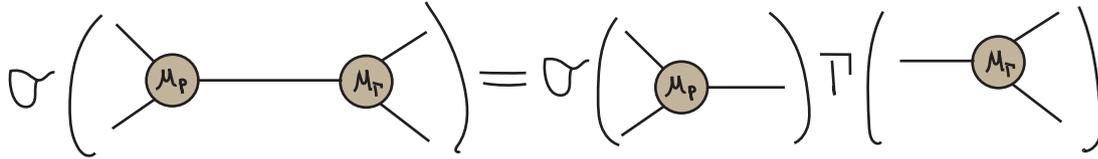
(Diagrama de pensamento: $i\mathcal{M} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{diagramas 1PI} + \dots$)

A largura desta distribuição é dada pela taxa de decaimento, e é por isso que frequentemente usamos largura de decaimento e taxa de decaimento como sinônimos

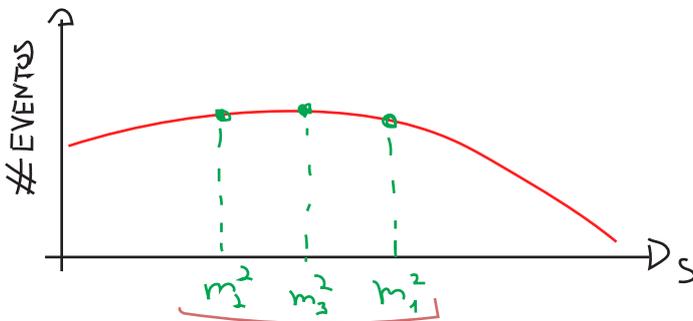
No limite em que a largura está indo para zero podemos tratar esta distribuição como uma delta de Dirac com a normalização apropriada:

$$\frac{1}{(s - m^2)^2 + (m \Gamma_{\text{TOT}})^2} \sim \frac{\pi}{m \Gamma} \delta(s - m^2)$$

esta aproximação é conhecida como **Narrow Width Approximation**, e na prática separa a produção da partícula do seu decaimento:



Por outro lado, no extremo oposto temos estados intermediários que vivem tão pouco que é um abuso de linguagem chamá-los de partículas. Temos que voltar à eq. 127.2, e a distribuição de eventos será tão larga que fica difícil escolher uma massa para ser a “massa física”:



qual destes valores é a massa da “partícula”?

O fato é que chamar um estado de “partícula” é uma aproximação tão boa quanto mais longa for a vida média do estado.



Abordagem de Wilson e o Grupo de Renormalização

(Peskin 12.1; Schwartz 23.6)

Até agora nós conseguimos, de forma bastante pragmática, definir formas de extrair observáveis a partir de modelos (Lagrangianas) em Teoria Quântica de Campos em ordens mais altas da expansão perturbativa. Vimos que é possível redefinir os campos de forma a deixar mais explícito o conteúdo físico destas teorias:

- Em alguns casos (Lamb-shift, g-2) **as partes finitas** dos loops contribuíram diretamente para observáveis, permitindo **fixar parâmetros do modelo em uma escala específica de energia**.
- Em outros, os loops induziram **dependência dos observáveis** (secções de choque) em condições diferentes do momento externo, quer seja **em diferentes escalas de energia** (que depende de algum p^2) ou dos ângulos entre os momentos (no caso das divergências colineares). Vimos que estas dependências são calculáveis e as diferenças finitas, ainda que os loops sejam infinitos, e servem como um poderoso teste dos nossos modelos.

Este segundo ponto é sutil. Por um lado, vemos que os loops inserem uma dependência nos momentos que vai além do que se pode ver facilmente na Lagrangiana (com interações envolvendo derivadas,

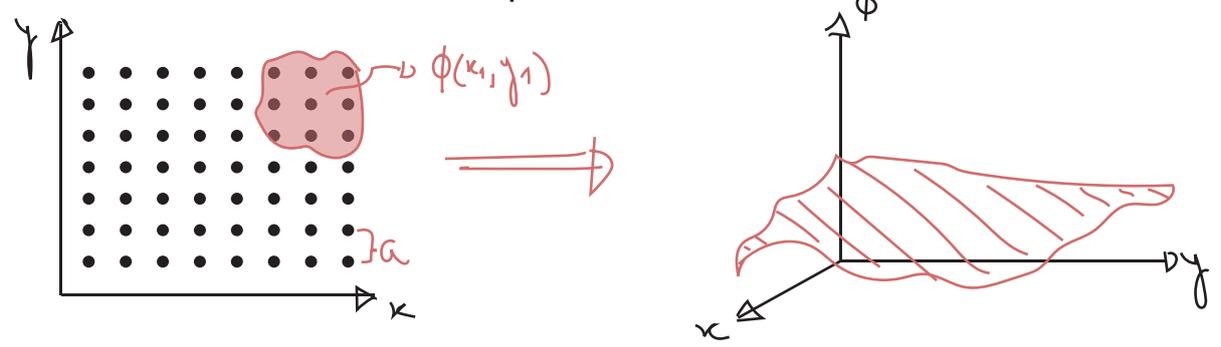
por exemplo) ou fixado pelo espaço de fase nas secções de choque (que não passa de conservação de energia e momento relativísticos), e é muito **conveniente** embutir esta dependência nos parâmetros da Lagrangiana (massas e acoplamentos) obtendo as **Running Constants**. É muito importante, no entanto, não confundir esta conveniência com física, uma vez que os acoplamentos (e em alguns casos as massas) não são diretamente observáveis e por isso acabam também dependendo de parâmetros internos da regularização e renormalização ($s_0, t_0, u_0, \Lambda, \epsilon, \mu, \text{etc...}$). **A dependência que nos interessa é nos momentos externos!** No entanto as duas dependências aparecem juntas (tipicamente no mesmo Log.) e por isso podemos usar uma para descobrir a outra.

O fato é que as Running Constants ganharam esta dependência em escalas não físicas justamente para compensar dependências do mesmo tipo em outras partes da conta e **manter os observáveis livres de ambiguidades**. O Grupo de Renormalização é um nome (não muito bom) dado a um conjunto de procedimentos que nos permite explorar esta restrição (independência dos schemes) para obter os runnings e entender melhor porque de fato eles estão ali. Usamos a dependência nos parâmetros não físicos com um atalho para descobrir a dependência nos momentos externos.

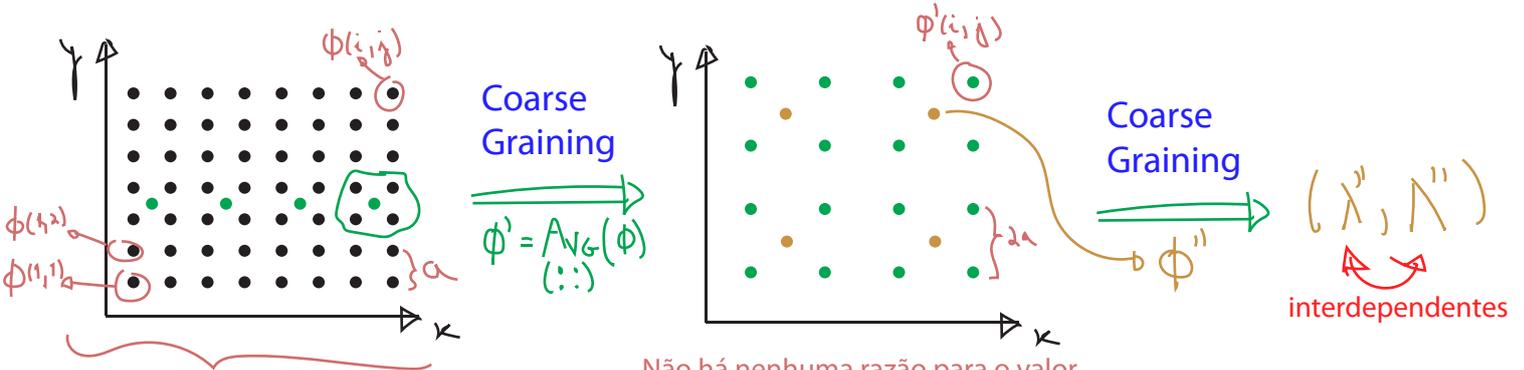
A primeira versão do Grupo de Renormalização que veremos é a Wilsoniana.

A inspiração em cut-offs físicos

Imagine que estamos tratando um sistema de matéria condensada com Teoria de Campos, não importa muito o que é (pode ser um mar de spins, um mapa de temperaturas ou densidades, ...), estamos apenas assumindo que podemos associar um valor a cada ponto no espaço (a projeção dos spins em z, por exemplo) e descrever um sistema em termos de um campo escalar:



Neste caso nós sabemos que este sistema, olhado muito de perto, é discreto e não faz sentido falar no campo nesta escala. Em termos concretos, se decomusermos o campo em modos de Fourier fica claro que há uma frequência máxima que faz sentido, logo temos um cut-off físico $\Lambda = 1/a$. É interessante pensar o que estamos fazendo quando afastamos deste limite microscópico (e complicado) para uma teoria muito mais simples válida em escalas maiores:



Tenho que especificar o valor em cada ponto e modelar as interações, e.g.:

$$L_I(\phi) = \lambda \sum_{i,j} \phi(i,j) \phi(i,j \pm 1)$$

Não há nenhuma razão para o valor do acoplamento ser o mesmo:

$$L'_I(\phi') = \lambda' \sum \phi' \phi'$$

O cut-off em termos destas variáveis também é outro: $\Lambda' = \frac{1}{2a}$

Estamos perdendo informação sobre os detalhes microscópicos da teoria e ficando só com o que importa a longas distâncias. De forma bastante pictórica, podemos dizer que estamos integrando sobre os modos de frequência alta (onde a informação microscópica está) e ficando com os de baixa frequência. No espaço dos momentos:

$$\int \mathcal{D}\tilde{\phi}(k < \Lambda) e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}'(k < \Lambda) \mathcal{D}\tilde{\phi}(\Lambda < k < \Lambda) e^{-S[\phi]} =$$

$$= \int \mathcal{D}\tilde{\phi}'(k < \Lambda) e^{-S'[\phi']}$$

grandezas dependentes do cut-off

muda o cut-off

A ideia básica da renormalização Wilsoniana é que, desde que estejamos longe da escala, microscópica, não deve importar muito quanto é o cut-off. Essa suposição é bastante intuitiva (engenheiros dificilmente se preocupam com a distância entre moléculas para resolver problemas de hidráulica) e tem como consequência que, mesmo com um cut-off físico na teoria, observáveis em grandes distâncias não devem depender do valor de Λ (este é o parâmetro "interno" neste caso).

Integração de camadas de momento

Vamos aplicar agora o que seria o Coarse Graining em uma teoria de campos. Aqui queremos tratar o caso mais simples possível (que já é bastante complicado!) e por isso olharemos um campo escalar real (que não tem nenhuma simetria que um cut-off "sharp" estragaria), com interação $\lambda\phi^4$, no espaço Euclidiano (onde "momento grande" e "pequeno" estão definidos sem ambiguidades):

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = \left(\prod_k \int d\phi(k) \right) e^{-S[\phi] + J \cdot \phi}$$

$$\phi(x_i) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k \cdot x_i} \phi(k)$$

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre: $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

indicaremos esta dependência na medida de integração:

$$[\mathcal{D}\phi]_\Lambda \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

(eq. 130.1)

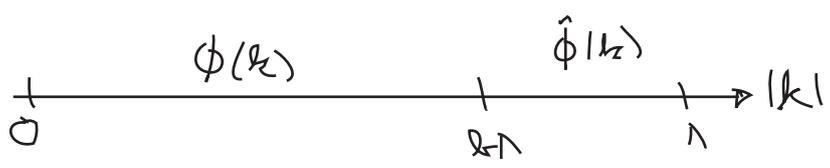
logo: suprimi a fonte para economizar espaço

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_\Lambda \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \right] \right\}$$

valor "inicial" para os parâmetros (não se precipite em concluir se estes são ou não os parâmetros "bare")

(eq. 130.2)

Façamos agora o equivalente ao Coarse Graining, trocando nosso campo por outro, que só está definido até um cut-off menor $b\Lambda$, com $b < 1$:



$$0 < b < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & b\Lambda \leq |k| < \Lambda \\ 0 & |k| < b\Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < b\Lambda \\ 0 & |k| \geq b\Lambda \end{cases} \end{cases}$$

flutuações / modos de "alta energia" (estes serão "integrados fora")

flutuações / modos de "baixa energia"

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int [D\phi]_{b\Lambda} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo $\phi(k)\hat{\phi}(k')$ são iguais a zero (ortogonalidade para $k \neq k'$)

$$Z = \int [D\phi]_{b\Lambda} e^{-\int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

(eq. 131.1)

Queremos então integrar em $\hat{\phi}$, se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), o vem do termo:

$$\int d^4x \partial_\mu \hat{\phi}(x) \partial^\mu \hat{\phi}(x) = \int d^4k \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int_{b\Lambda \leq |k'| < \Lambda} \frac{d^4k''}{(2\pi)^4} e^{-ikx} e^{-ik'x} k_\mu k''^\mu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k'') =$$

$$= \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que $\phi(x)$ seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\underbrace{\hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p)} = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{\Omega^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+p) \underbrace{\Theta(k)}_{\substack{\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad k-\Lambda \leq |k| < \Lambda \\ 0 \quad \text{quer outro } k \end{array} \right.}}$$

Os outros termos da Lagrangiana de $\hat{\phi}$ (em 131.1) são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo $\phi^2\hat{\phi}^2$:

$$\text{EXP} \left\{ - \int d^4x \lambda_0 \left(+ \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq 1 - \int d^4x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de ϕ e $\hat{\phi}$:

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos $\hat{\phi}$ só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

estamos assumindo que os campos externos serão ϕ e não $\hat{\phi}$

$$\left\langle \underbrace{\mathcal{O}_n(\phi)}_{\substack{\text{operador com } n \text{ campos } \phi}} \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\mathcal{N}}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

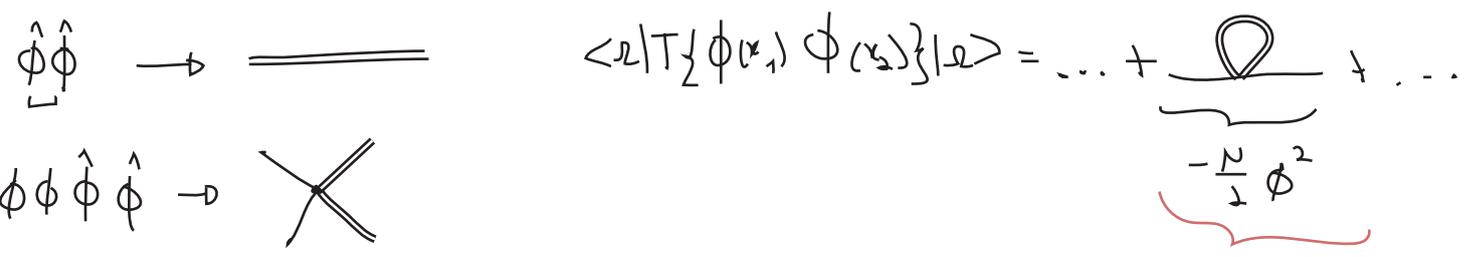
$$- \int d^4x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} = - \int d^4x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x} \hat{\phi}(k_1) \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{-ik_2x} \hat{\phi}(k_2) = - \int d^4x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{-ik_2x} \frac{1}{k_1^2} \delta^4(k_1+k_2) \Theta(k_1) = - \int d^4x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}$$

$$\mathcal{N} = \frac{\lambda_0}{2} \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{2(4\pi)^2} (1 - \Omega^2) \Lambda^2$$

(eq. 132.1)

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{\mu}{2} \phi^2$ na Lagrangiana, se o resto da expansão perturbativa em μ aparecer, poderemos exponenciar esta série e tratá-la como uma correção à m_0

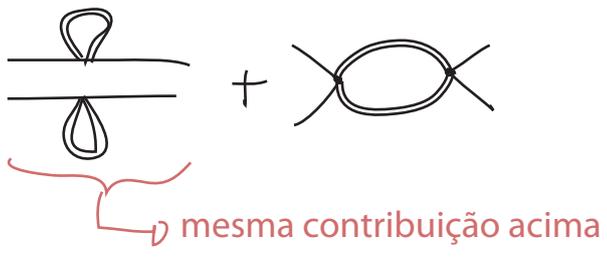
Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



vai aparecer toda uma série de diagramas do tipo:

 que pode ser ressonada e corrige a massa (como esperado)

Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

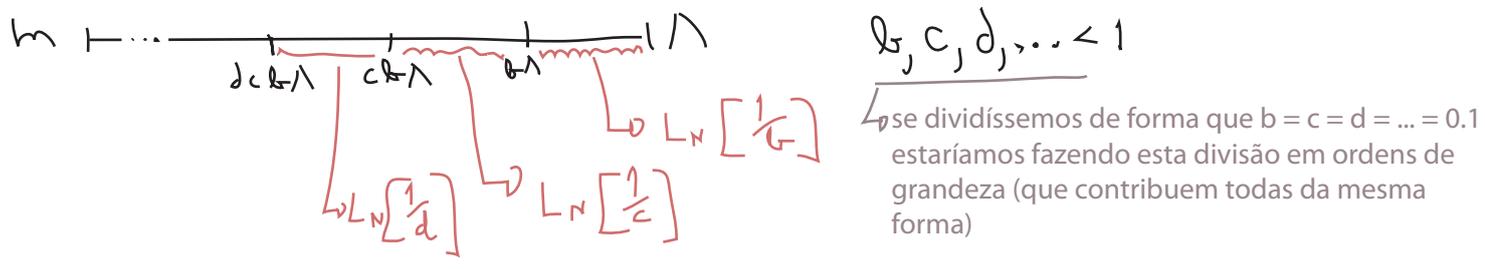
$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^4x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{diagrama com 4 pernas} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{3\lambda_0^2}{2} \frac{1}{2^2\pi^2} L_N\left[\frac{\Lambda}{b\Lambda}\right] = -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N\left[\frac{1}{b}\right]$$

Taylor series $k \ll \Lambda \leq |k| < \Lambda$

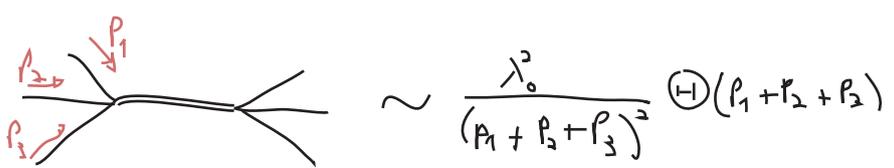
(eq. 133.1)

Note que se fizéssemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



A eq. 133.1 é diretamente comparável com a parte divergente da equação 45.1 (lembrando que (1) ali temos o contratermo e por isso o sinal oposto ao loop; e (2) o fator de 32 é porque tínhamos escalas de energia ao quadrado no L_N , o que poderíamos forçar aqui escrevendo $L_N(1/b^2)$), só que aqui as integrais são sempre finitas!

Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4 , mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3\hat{\phi}$ por exemplo, produz uma interação ϕ^6 :



Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas externas. Se ao invés disso fizemos uma série de Taylor no momento externo, o próximo termo seria:

$$\text{Diagrama} = -\frac{1}{4!} \int d^4x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^4x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{O}(d^4)$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int [D\phi]_{\mathcal{B}\Lambda} e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{\text{EFF}}}$$

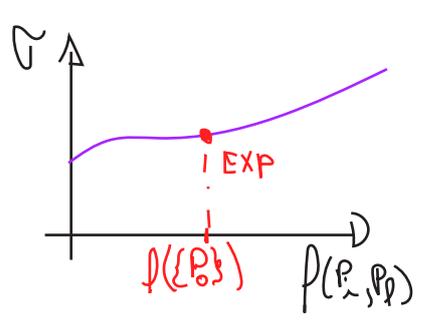
tudo que respeite as simetrias da Lagrangiana original aparece aqui

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 134.1})$$

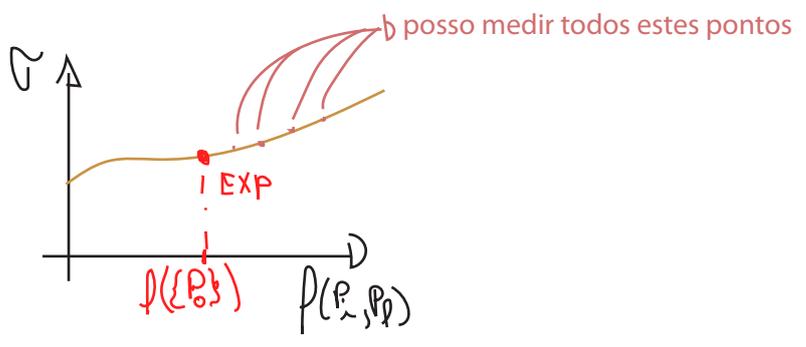
Agora podemos usar dois modelos "diferentes" para fazer previsões. De um lado usamos a Lagrangiana original, integrando loops até $|k| = \Lambda$, e por outro usamos a Lagrangiana efetiva com cut-off menor ($b\Lambda$). No entanto a física bem abaixo de ambos os cut-offs deve ser a mesma:

$$\mathcal{L}(\Lambda, m_0^2, \lambda_0) \rightarrow \sigma$$

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}}(b\Lambda, m_0^2 + \nu^2, \lambda_0 + \zeta, \eta, \dots) \rightarrow \sigma$$



=



importantíssimo!

E por isso é óbvio que os parâmetros da Lagrangiana efetiva devem ser diferentes da original, esta é a única forma de compensar o fato que mudamos o limite superior das integrais dos loops.

Fluxo do Grupo de Renormalização

Façamos uma comparação entre a Lagrangiana original e a que obtivemos após a integração. Lembre-se que parte da mudança que fizemos está na integração (o cut-off) e parte na Lagrangiana (massas e acoplamentos), mas há um truque que podemos fazer para deixar tudo na Lagrangiana.

Uma transformação de escala ação efetiva:

$$k' = k/b \quad x' = x/b$$

restaura os limites de integração em k para: $0 < |k| < b\Lambda \rightarrow 0 < |k'| < \Lambda$

e causa a seguinte mudança na Lagrangiana (efetiva):

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' b^{-d} \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) b^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C b^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

vamos fazer o "upgrade" agora para d dimensões (Euclidianas), assim ficamos com expressões gerais e úteis para comparar com sistemas de matéria condensada

O termo cinético desta Lagrangiana tem um fator que claramente não levará a propagadores normalizados canonicamente (na linguagem que usamos antes, aqui temos $Z \neq 1$). Mas podemos renormalizar, voltando a uma forma muito parecida com a Lagrangiana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \phi' &\equiv [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\ m'^2 &\equiv (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &\equiv (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &\equiv (C_0 + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &\equiv (D_0 + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

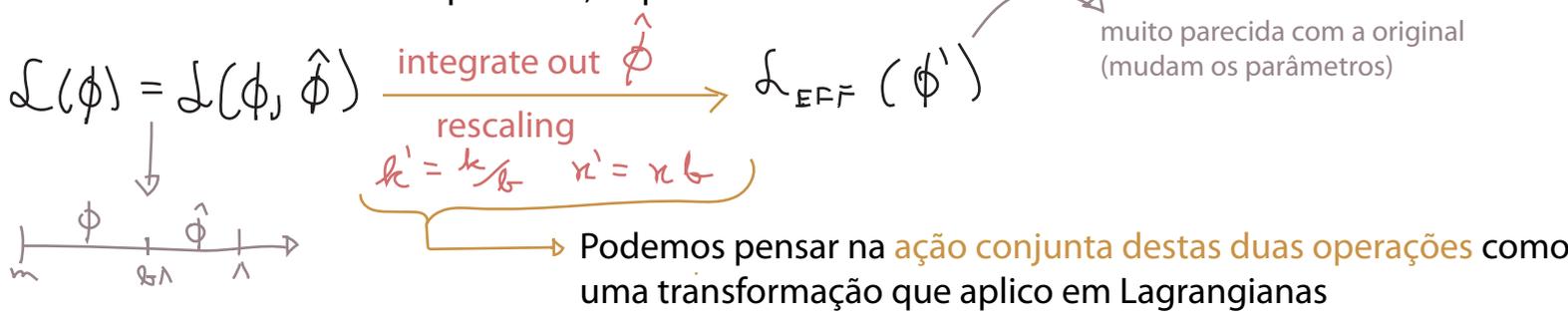
$$\begin{aligned} \phi &= b^{\frac{d-2}{2}-1} (1 + \Delta z)^{-\frac{1}{2}} \phi' \\ \phi^2 &= b^{d-2} (1 + \Delta z)^{-1} \phi'^2 \end{aligned}$$

(eq. 135.1)

Assim o termo cinético fica como gostamos e o resto da Lagrangiana tem o formato usual:

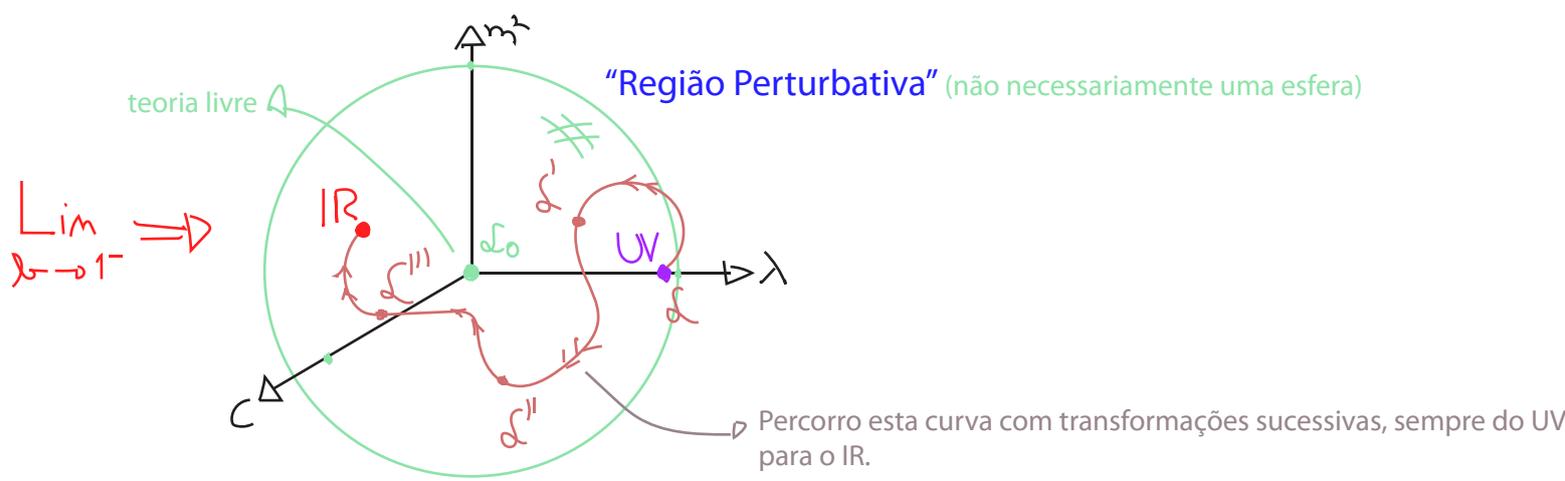
$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \phi'^4 + C' (\partial'_\mu \phi')^4 + D' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 135.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b, c, \dots) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

$$\mathcal{L} \xrightarrow{b} \mathcal{L}' \xrightarrow{b} \mathcal{L}'' \xrightarrow{b} \mathcal{L}'''$$



Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$$

Calculamos a função de n-pontos

A nível árvore (LO) não há qualquer informação sobre a dinâmica dos modos de alta energia! Assim que consideramos loops (N^+LO) a dinâmica de altas energias entra toda de uma só vez causando uma mudança grande nos parâmetros (de fato infinita, se considerarmos um cut-off também infinito)

Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \approx -\delta m$
 $\lambda = \lambda_0 \approx \lambda - \delta \lambda$
 as divergências aqui (nos δ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa (embora já vimos que o problema é só aparente)

resultados finitos! 🤔

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que “integramos” os modos de alto momento, **embutindo o seu efeito de volta na Lagrangiana**. Em cada passo das transformações do Grupo de Renormalização temos só **integrais finitas** e os parâmetros da Lagrangeana **podem continuar pequenos**.

$(m_0 \ll \Lambda)$
 m_0, λ_0 finitos!
 $(\lambda \text{ perturbativo})$

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação. Logo não podemos sair da “região perturbativa”

$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$

Calculamos a função de n-pontos

Já temos efeitos dos modos de alto momento embutidos nos parâmetros, entrando a **nível árvore!** Quando incluímos os **loops**, estes **são finitos** (o campo que sobra é zero para qualquer momento muito acima dos momentos externos considerados)

resultados finitos 🧐

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas ideias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias).

Vejamos como a Lagrangiana tende a variar sob as transformações do grupo de renormalização. As Lagrangianas são definidas no espaço dos **Coeficientes de Wilson** de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso de um campo escalar, por exemplo:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$

da forma que definimos as transformações do RG o coeficiente do termo cinético fica sempre igual (na linguagem que vínhamos usando Z é sempre 1)

coordenadas de um certo espaço de Lagrangeanas escalares (aquelas que satisfazem a simetria Z_2 neste exemplo)
 $\phi \rightarrow -\phi$

O ponto $\{m^2, \lambda, c, \mathcal{D}, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$

e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Mais especificamente, este é o **Ponto Fixo Gaussiano** da teoria (pois só temos termos quadráticos e sabemos resolver a teoria exatamente). Se ficarmos bem perto deste ponto, tudo fica mais simples, pois podemos ignorar as correções

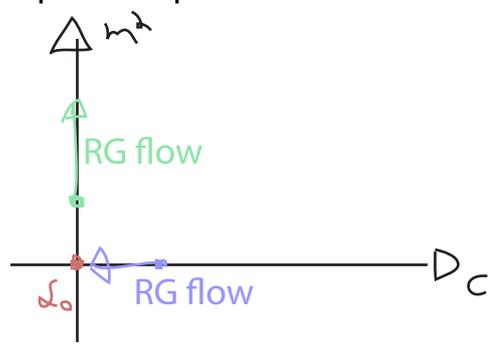
ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar (linearizar) as transformações 135.1:

(eq. 135.1)

$$\left. \begin{aligned}
 m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2)(1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\
 \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda)(1 + \Delta z)^{-2} b^{d-1} \\
 C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta z)^{-2} b^d \\
 D' &= (D + \Delta D)(1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\
 \vdots &
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 m'^2 &\approx m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\
 \lambda' &\approx \lambda_0 b^{d-1} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\
 C' &\approx C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\
 D' &\approx D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\
 \vdots &
 \end{aligned} \right.$$

(eq. 138.1)

Como $b < 1$, os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação. Por exemplo, no plano $\{m^2, C\}$ temos:



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar: ϕ^2 é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

$$\phi^4 \begin{cases} d < 4 & \text{relevante} \\ d = 4 & \text{marginal} \\ d > 4 & \text{irrelevante} \end{cases}$$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de ϕ (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 135, lembre-se que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo } (\phi = b^{\frac{d-2}{2}} \phi + \dots)} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d-2}{2}\right) + M - d} C_{N,M}$$

(eq. 138.2)

Note que a dimensão do operador é (veja pg 58):

$$\text{Dim} [\hat{O}_{N,M}] = \underbrace{N\left(\frac{d-2}{2}\right)}_{\text{dimensão do campo escalar}} + \underbrace{M}_{\text{cada derivada aumenta a dimensão em 1}} \equiv d_{N,M}$$

Como a Lagrangiana deve ter dimensão d , a dimensão do coeficiente de Wilson deste operador deve ter dimensão:

$$\text{Dim}[C_{N,m}] = d - d_{N,m} = d - \left[N \left(\frac{d-2}{2} \right) + m \right] \equiv D_c \quad (\text{eq. 139.1})$$

que é justamente o que aparece no expoente de b em 138.2:

$$C'_{N,m} = b^{-\text{Dim}[C_{N,m}]} C_{N,m} \quad (\text{eq. 139.2})$$

Comparando isto com o resultado da página 59, vemos que operadores **relevantes** ($D_c > 0$) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ($D_c = 0$) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ($D_c < 0$) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em fazer análise dimensional. O coeficiente será dado por alguma escala de massa elevada à potência correta:

$$[C_{N,m}] = [\text{massa}]^{D_c} = [\text{massa}]^{d - d_{N,m}} \quad \text{dimensão do operador}$$

conforme estamos “integrando fora” camadas de momento, fazemos integrais entre $b\Lambda$ e Λ , aonde Λ é o cut-off válido naquele ponto da trajetória do fluxo de renormalização. Isto significa que, salvo cancelamentos ou situações especiais, a contribuição que cada coeficiente recebe é de ordem Λ , que é uma escala maior do que qualquer outra no problema. Assim os coeficientes serão de ordem:

$$C_{N,m} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,m}}$$

(este é o argumento por trás do conceito de “naturalidade” para o valor destes coeficientes de Wilson. Desvios desta expectativa são esperados caso haja alguma simetria “protegendo” o coeficiente. Um exemplo que já vimos são as massas dos férmions)

um exemplo explícito é o valor de m em 132.1 (proporcional a Λ^2). Isso quer dizer que num processo produzido por este operador, a intensidade da interação será proporcional a:

$$\left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{d_{N,m} - d} \rightarrow \begin{cases} d_{N,m} < d & \text{interação cada vez mais importante em momentos pequenos (op. relevante e renormalizável)} \\ d_{N,m} > d & \text{interação suprimida por potências de } p/\Lambda \text{ conforme } p \ll \Lambda \text{ (op. irrelevante e não-renormalizável)} \end{cases}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos no caso perturbativo, **qualquer Lagrangiana**, não importa o quão complicada, **acabará se tornando uma Lagrangiana** com um numero finito (e de fato pequeno) **de interações renormalizáveis**.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

não queremos ter um cut-off na teoria

$$\Lambda \rightarrow \infty$$

observáveis não podem depender do cut-off assim são finitos

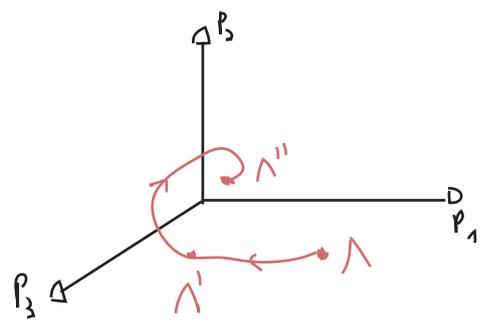


Só consigo uma **teoria preditiva** se não houver termos não-renormalizáveis (ou puder assumir que são suprimidos por alguma escala)

↳ Só teorias renormalizáveis (ou com operadores de dimensão alta suprimidos) são boas (é uma **"sorte"** que a QED e outras no MP o sejam)

↳ sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que **qualquer teoria de campo tenha um cut-off** - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na Lagrangiana Efetiva.



$$\Lambda > \Lambda' > \Lambda''$$

$$\mathcal{L}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{L}_{EFF}(\Lambda') \rightarrow \mathcal{L}'_{EFF}(\Lambda'')$$

cut-off desta lagrangeana

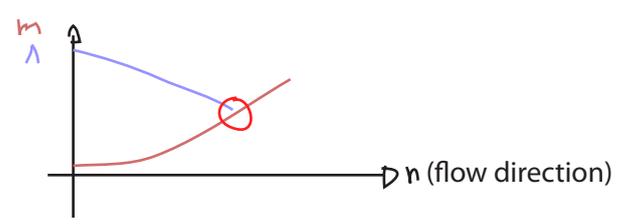
Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão uma razão para que a QED seja renormalizável: **qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias**. E ganhamos também "no front" das teorias não-renormalizáveis (tais como teoria de perturbação quiral, ou interação de Fermi), fica claro que de fato **os operadores não-renormalizáveis estão sempre suprimidos por uma escala alta de energia** (que só perceberemos se fizemos experimentos com momento perto do cut-off). Não há sorte nenhuma aqui, a conclusão é que todas as teorias de campos funcionam desde que: (1) **sejam perturbativas** e (2) **não tentemos começar com um cut-off no infinito** (que era exatamente o que estávamos fazendo na renormalização BPHZ)

O ponto (1) acima é muito importante. Teorias que comecem ou se tornem fortemente acopladas em alguma escala invalidam 138.1, e precisamos considerar potências mais altas das interações. Essas **interações fortes podem atenuar ou até inverter completamente o fluxo de renormalização, mudando muito o que se espera só baseado na análise dimensional**. Ainda que comecemos dentro da "região perturbativa" (perto do Ponto Fixo Gaussiano), temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com $m_0 \ll \Lambda_0$

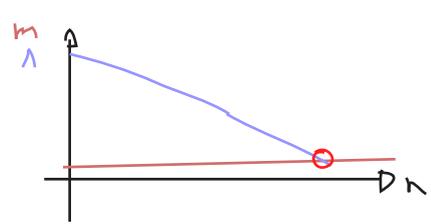
$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 e^{-2n}$
 $\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$



Em algum ponto $m'^2 \sim \Lambda'^2$ e temos que parar aí. De fato nem faz sentido exigir que a teoria seja independente do cut-off nessa situação. Portanto o que queremos é que nossas teorias estejam em um regime aonde ainda temos que fazer um número grande de passos antes de chegar em $m'^2 \sim \Lambda'^2$

Um jeito de conseguir isso é se cada passo mudar bem pouco a massa. Assim, exigir que m' seja uma massa "pequena" significa exigir que o modelo:

(a) comece muito perto do ponto fixo da teoria livre. Isso significa que as interações são bem fracas e a massa muda muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando:



(b) se o modelo começar longe de d_0 , mas essa distância é na direção de algum operador irrelevante, de forma que ele flua rápido para o ponto fixo Gaussiano e então passe a se comportar como (a).

$\lambda \phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d = 4$

⇒ Neste caso temos que ficar atentos ao operador ϕ^4 , o lado direito da a equação 138.1 nos diz que este acoplamento não muda, mas isso só quer dizer que o running é dominado pela próxima ordem perturbativa:

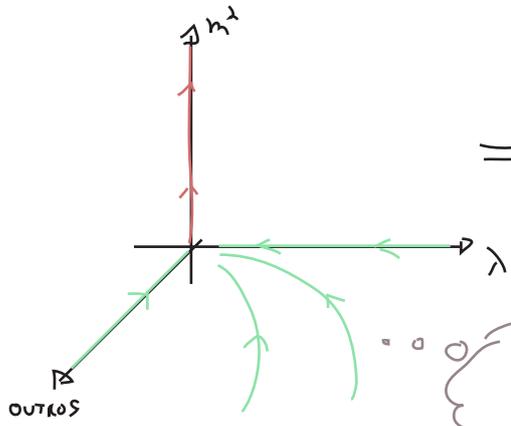
$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda) (1 + \Delta z)^{-d} e^{(d-4)n}$
 $\Delta z \sim \frac{1}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$
 só corrige a massa (veja a eq 44.1 e note que não há termos proporcionais ao momento. Outra forma de ver é a eq. 46.1)

(eq. 141.1)

$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{G}\right)$
 $L \rightarrow 1$
 $L \rightarrow 0$

→ λ' diminui lentamente conforme "integramos"





⇒ isso quer dizer que $\lambda\phi^4$ acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de $\lambda\phi^4$ sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que λ

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d < 4$

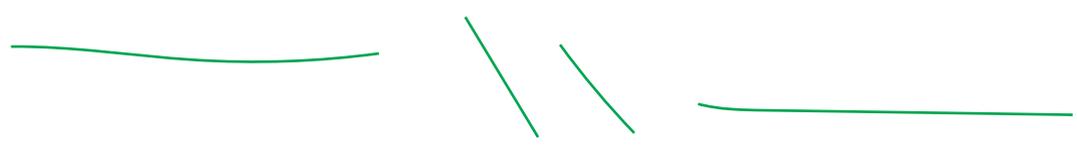
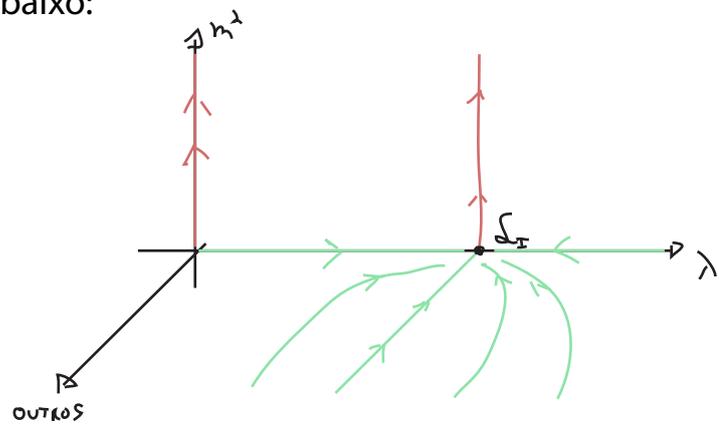
⇒ O operador ϕ^4 agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de λ vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem λ . Devemos generalizar 133.1 para $d < 4$:

$$\Delta\lambda = -3!\lambda^2 \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = -\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - e^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - e^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4} \right) e^{d-4} \quad (\text{eq. 142.1})$$

$\lambda' \sim \lambda e^{d-4}$

este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto λ pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da Lagrangiana livre se fazemos $d \rightarrow 4$, e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de $d = 4$ temos o diagrama abaixo:



Equações do Grupo de Renormalização

Os "running couplings" e os logaritmos grandes

(Schwartz 23.1)

Nas equações 141.1 e 142.1 obtivemos o "running" do acoplamento λ em termos das variáveis "não físicas" b e Λ (no sentido em que não queremos que os observáveis dependam destas). No entanto em ambos os casos temos uma transformação finita (o passo é de tamanho "1/b") e há uma tensão entre o tamanho do passo e a expansão perturbativa:

(eq. 141.1) $\Rightarrow \lambda' \approx \lambda \left[1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2} L_N\left(\frac{1}{b}\right) \right]$

crescem muito quando $b \ll 1$

(eq. 142.1) $\Rightarrow \lambda' = \lambda b^{d-4} \left(1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1-b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4} \right)$

Outro lugar onde isto apareceu foi no nosso cálculo do running da carga elétrica. De 94.4 temos:

(94.4) $\Rightarrow \Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) L_N\left(\frac{m^2}{n^2 - x(1-x)q^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$

E isto leva a uma carga "running" (pg 101):

$\alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{-q^2 \gg m^2}{=} \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} L_N\left[-\frac{q^2}{m^2} e^{-5/2}\right]}$ (101.1)

Aqui está claro que, mesmo mantendo $\alpha = 1/137$, o logaritmo vai crescer e gerar o polo de Landau. O que não está claro é que isso também **depende da escala onde colocamos a condição de renormalização**. Para deixar mais explícito, mudemos nossa condição da seguinte forma:

$\Pi(q^2 = 0) = 0 \longrightarrow \boxed{\Pi(q^2 = q_0^2) = 0}$ (eq. 143.1)

Isso muda o contratermo e a auto-energia (veja página 94):

(94.3) $\xrightarrow{q^2=0 \rightarrow q^2=q_0^2} \Sigma_3 = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N\left(\frac{\tilde{N}^2}{n^2 - x(1-x)q_0^2}\right) \right]$

(94.4) $\frac{q^2=0 \rightarrow q^2=q_0^2}{\rightarrow} \quad \Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) L_N\left(\frac{n^2 - x(1-x)q_0^2}{n^2 - x(1-x)q^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$

No limite ultra relativístico, podemos ignorar as massas dos elétrons e obter:

$-q_0^2, -q^2 \gg m^2$

$$\Pi(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q_0^2}{q^2}\right) \quad (\text{eq. 144.1})$$

$$\alpha \equiv \alpha_{\text{EFF}}(q_0^2) \neq \frac{1}{137} !!$$

$$\alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \quad (\text{eq. 144.2})$$

Mais uma vez podemos obter um Log grande afastando q^2 de q_0^2 , mas é fácil se confundir com isso, pois parece que basta fazer uma escolha de q_0^2 perto da escala de interesse e o Log estará sempre sobre controle. A razão pela qual isso não funciona é que **a constante α também tem uma dependência implícita em q_0** :

$$q_0 \leftrightarrow \alpha = \alpha_{\text{EFF}}(q_0^2)$$

$$q_0' \leftrightarrow \alpha' = \alpha_{\text{EFF}}(q_0'^2)$$

Assim, quando mudo q_0 , redefino α de forma a manter a dependência $\alpha_{\text{EFF}}(q^2)$ inalterada (é essa dependência com o momento físico que conseguimos observar), com isso transfiro o crescimento do Log para o crescimento de α . Isso parece indicar que **o parâmetro de expansão que deveríamos usar é α_{EFF} e não α** , mas ainda não formalizamos isso. Outra questão que preocupa é a ressonância das contribuições de 1-loop que fizemos. Note que:

$$\alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} = \alpha \left(1 + \underbrace{\frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}_{\text{1-loop}} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{(3\pi)^2} L_N^2\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}_{\text{2-loops}} + \underbrace{\frac{\alpha^3}{(3\pi)^3} L_N^3\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}_{\text{3-loops}} + \dots \right) \sim \sum_{n \geq 0} \alpha \left[\frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right) \right]^n \quad (\text{eq. 144.3})$$

Incluimos toda uma série em α , incluindo termos α^n , mas não incluimos diagramas 1PI em 2-loops, tal como:



Isto claramente **não é o truncamento normal da série perturbativa**, e é conhecido por **Leading Logarithmic Resummation**. Isto pode ser uma boa aproximação, desde que consigamos provar que

$$\left(\text{diagrama} + \text{diagrama} + \dots \right) \sim \sum_n \alpha^n \left[\frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right) \right]^n$$

mas não é óbvio que estes diagramas não podem produzir termos tais como: $\alpha^3 L_N^2\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)$

no caso de QED e $\lambda\phi^4$, poderíamos (com muito trabalho) mostrar isso a 2-loops, mas claramente não é algo muito prático, e pode se tornar inviável para teorias mais complicadas (e com diversas interações).

Tanto o problema do tamanho do "passo" nas transformações, quanto da interdependência na variação de quantidades (neste caso entre $\ln(q/q_0)$ e a "constante" α) apontam para a mesma solução: equações diferenciais. De fato, é fácil converter a equação 139.2 em uma equação diferencial para os coeficientes de Wilson, basta pensar na transformação de escala com b infinitesimalmente perto de 1:

$$b \equiv 1 - \delta b \quad \delta b \rightarrow 0^+$$

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{b} \quad \Lambda' \simeq (1 + \delta b)\Lambda = \Lambda + \Lambda\delta b \equiv \Lambda - \delta\Lambda$$

$\delta b = \frac{\delta\Lambda}{\Lambda} \quad (ii)$

(cuidado: esta é a transformação de scaling e não o momentum shell integration - ambas transformações foram feitas com o mesmo parâmetro b - por isso o b aparece dividindo. O scaling entra dividindo em escalas de momento)

e substituir esta transformação em 139.2:

$$C'_{N,M} = b^{-D_{im}[C_{N,M}]} C_{N,M} = (1 - \delta b)^{-D_{im}[C_{N,M}]} C_{N,M} \equiv C_{N,M} + \delta C_{N,M}$$

$$C_{N,M} + D_{im}[C_{N,M}]\delta b C_{N,M} + O(\delta b^2)$$

$\delta C_{N,M} \simeq D_{im}[C_{N,M}]\delta b C_{N,M} \Rightarrow \frac{\delta C_{N,M}}{\delta b} = D_{im}[C_{N,M}] C_{N,M} \quad (iii)$

$(ii) \left. \begin{array}{l} \\ (iii) \end{array} \right\} \Lambda \frac{\delta C_{N,M}}{\delta \Lambda} = D_{im}[C_{N,M}] C_{N,M} \Rightarrow \Lambda \frac{dC_{N,M}}{d\Lambda} = D_{im}[C_{N,M}] C_{N,M} \quad (eq. 145.1)$

Equações como 145.1 podem ser mais formalmente obtidas exigindo que observáveis sejam independentes do cut-off:

$$\frac{d}{d\Lambda} X = 0$$

↘ algum observável

mas esta não é a única opção (nem a mais apropriada, considerando o que hard cut-offs fazem com as simetrias), poderíamos, em outros esquemas de renormalização, exigir:

$\frac{d}{d\mu_0} X = 0$

↘ escala de referência para a condições de renorm.

$\frac{d}{d\mu} X = 0$

↘ uma das muitas coisas que chamamos de μ

A questão é qual destas escalas não-físicas usar (e se precisamos usar mais de uma). Vamos comparar algumas possibilidades no caso da auto-energia do fóton (a 1-loop):

$$\tilde{\Pi}(q^2) = \tilde{\Pi}_2(q^2) - \delta_3 =$$

(eq. 94.2)
$$= -\frac{2\alpha}{3\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N \left(\frac{\Lambda^2}{x^2 - x(1-x)q^2} \right) + \text{const.} \right] - \delta_3 =$$

$$= \widehat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N \left[\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right] + \text{const.} \right] - \delta_3$$
 (Dim. Reg.) (eq. 146.1)

const.
Stands for some combination of numbers that do not depend on the external momenta, nor on the unphysical regulators and scales. IT IS NOT the same number in every equation here.

O mesmo cálculo, fazendo regularização de Pauli-Villars, daria:

$$\widehat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{3\pi} \left[L_N \left[\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right] + \text{const.} \right] - \delta_3$$
 (P.-V.) (eq. 146.2)

Neste limite é fácil ver que se introduzirmos apenas uma escala não física (em um caso Λ e no outro μ) **os logaritmos** nesta escala **conterão sempre também uma escala física** (alguma combinação dos momentos externos). Voltando para energias mais baixas temos também as massas, mas estas têm que estar "somadas" com os momentos externos, para que a afirmação acima seja verdade no limite ultrarelativístico. É exatamente isso que as equações do RG (renorm. group) exploram, obtemos a dependência nos parâmetros arbitrários e ganhamos "de brinde" os runnings nos momentos físicos.

Em aplicações práticas de RG, usamos quase sempre a Dim. Reg., por isso é bom entender bem qual variável estamos escolhendo como "não-física". A renormalização que nos incomoda menos, do ponto de vista da interpretação, é aquela em que escolhemos um ponto de referência q_0 , no qual assumimos que foi feita uma medida que fixa o valor de um acoplamento ou massa:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\Pi}(q^2 = q_0^2) = 0 \\ 146.2 \end{array} \right\} \delta_3 = -\frac{2\alpha}{3\pi} L_N \left[\frac{\Lambda^2}{-q_0^2} \right] \rightarrow \widehat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{3\pi} L_N \left(\frac{-q_0^2}{-q^2} \right) + \text{const.}$$
 (P.-V.; q_0) (eq. 146.3)

Por outro lado, a menos intuitiva é a prescrição \overline{MS} (que é usada em Dim. Reg.):

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MS} \\ 146.1 \end{array} \right\} \delta_3 = -\frac{2\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N(4\pi) - \beta \right] \rightarrow \widehat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{3\pi} L_N \left(\frac{\mu^2}{-q^2} \right) + \text{const.}$$
 (Dim. Reg.; μ) (eq. 146.4)

onde μ é a escala introduzida pela Dim. Reg. e "reinterpretada" como subtraction point quando fizemos o esquema \overline{MS} . Os dois esquemas parecem muito diferentes, até que você note que podíamos fazer a seguinte escolha:

$$\left. \begin{array}{l} \text{YAS} \\ \text{"yet another scheme"} \\ 146.1 \end{array} \right\} \delta_3 = -\frac{2\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} + L_N \frac{\mu^2}{-q_0^2} \right] \rightarrow \widehat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{3\pi} L_N \left(\frac{-q_0^2}{-q^2} \right) + \text{const.}$$
 (Dim. Reg.; q_0)

o que é a mesma coisa que escolher $\mu = q_0$ e jogar o $1/\epsilon$ fora "à la" MS. O importante é notar que todas estas escalas são intercambiáveis e podemos ficar com uma só (jogando o que resta - incluindo as "consts" - no contratermo), esta escala que sobra chamaremos de M^2 (e sempre que importar estaremos olhando a região $-q^2 > 0$ e $M^2 = -q_0^2 > 0$, que é apropriada para discutir potenciais e evita os branch cuts complicados na região $q^2 > 0$) e no contexto das Eq. do RG ela é chamada de **Escala de Renormalização**. **Não tem nada de físico nesta escala**, e todos os observáveis devem independê-la. **A única coisa que é realmente física e não pode ser absorvida no contratermo é o $\text{Log}[q^2]$** , porque um contratermo deste tipo teria que multiplicar um termo não local na Lagrangiana.

A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2; Schwartz 23.4.3)

Agora estamos prontos para parar de falar das equações e começar a escrevê-las. Fiquemos inicialmente em uma teoria escalar. Antes de qualquer renormalização, uma função de Green de n pontos é dada por:

$$G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \underbrace{\phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n)}_{\text{independe da escala } M} \} | \Omega \rangle$$

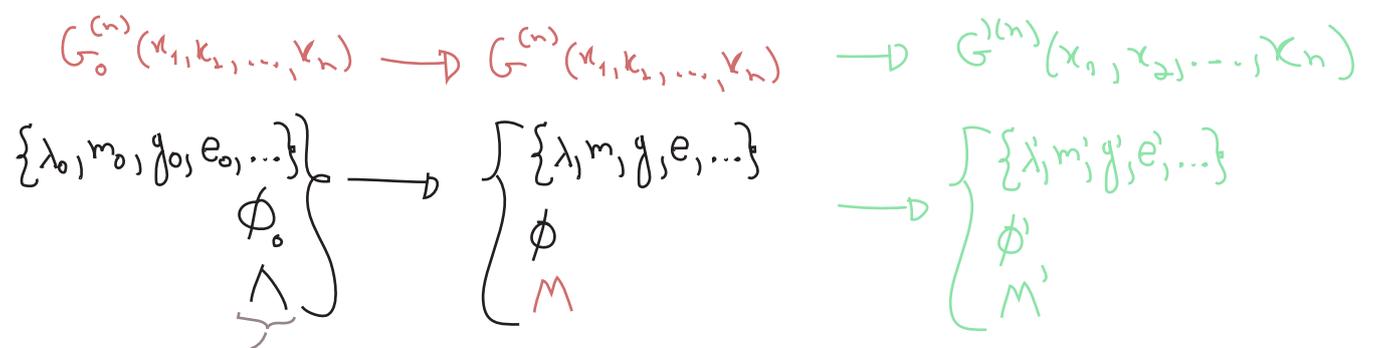
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"bare"}}$

Assim que renormalizamos (temos em mente a Renorm. BPHZ):

$$\phi \equiv Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\langle \Omega | T \{ \underbrace{\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \} | \Omega \rangle = Z^{-n/2} \langle \Omega | T \{ \underbrace{\phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n)}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \} | \Omega \rangle$$

esta agora depende de M , pois este parâmetro aparece nos contratermos



$$M' = M + \delta M$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em M ?

Vamos ver o caso mais simples, que é um escalar sem massa, com apenas um acoplamento "lambda". Como vimos, os acoplamentos e definições do campo têm que mudar para compensar a mudança da escala M (os contratermos mudam):

$$M \rightarrow M + \delta M \Rightarrow \begin{cases} \lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda \\ \phi \rightarrow (1 + \delta \eta) \phi \end{cases} \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \phi = z^{-1/2} \phi_0 \\ \downarrow \\ \phi = z^{-1/2} (1 + \delta \eta) \phi_0 \end{array} \right.$$

Como: $G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = z^{-n/2} G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Na função de Green só importa a mudança em Z (já que G_0 só depende dos parâmetros núts):

$$z^{-1/2} \rightarrow (1 + \delta \eta) z^{-1/2} \rightarrow z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta \eta)^n z^{-n/2} \sim (1 + n \delta \eta) z^{-n/2}$$

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n \delta \eta) G^{(n)} \quad (\text{eq. 148.1})$$

Pensando em G como uma função de M e λ , esta transformação é dada por:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n \delta \eta G^{(n)} \quad (\text{eq. 148.2})$$

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 148.3})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 148.4})$$

Temos:

$$\left(\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre β e γ :

são os mesmo para qualquer n

são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa

$$\beta, \gamma(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$$

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

$$M \frac{d}{dM} G_0 = 0$$

(exercício)

Equação de Callan-Symanzik (RGE for a Green Function) (eq. 149.1)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$ ligada a **mudança na constante de acoplamento**

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$ ligada a **mudança no campo** (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em M será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função γ para cada campo e uma função β para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa, $m_e = 0$) (n é o número de elétrons e m o de fótons):

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0$$

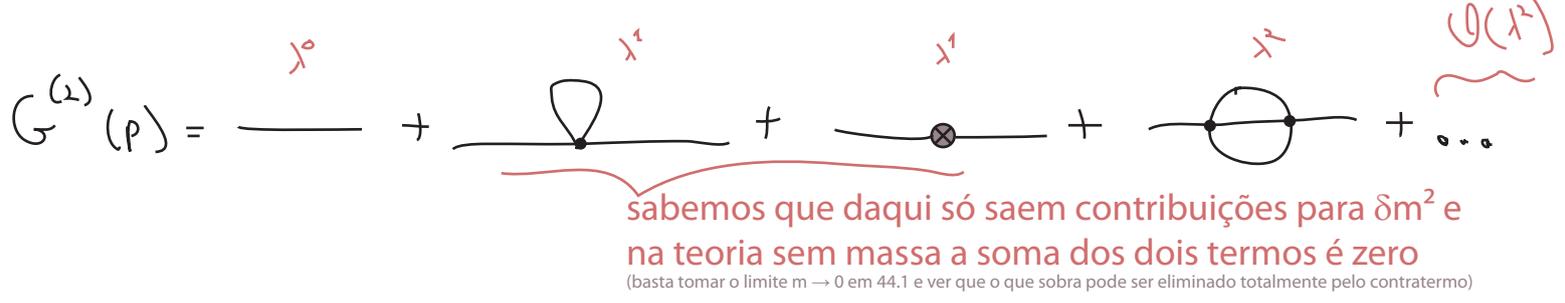
(Z_2) (Z_3)

(eq. 149.2)

Calculando β e γ

(Peskin 12.2)

Mais uma vez, fiquemos na teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Como β e γ não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher a mais conveniente, de forma a isolar uma destas funções e usar a própria equação de CS para obtê-la. Por exemplo, considere a função de 2 pontos:



Como estamos pensando em uma teoria sem massa δm^2 não é interessante (vamos sempre impor que δm^2 cancele o loop exatamente) e parece que teríamos que fazer o cálculo a 2-loops para ver algum efeito relevante (uma contribuição para δZ , mudando a normalização do propagador). Isso dá muito trabalho, então vamos procurar outra função de Green. No entanto podemos obter alguma informação sobre γ daqui:

como não há correções a $G^{(2)}$ em ordem λ , só introduzimos a dependência em M e λ em $G^{(2)}$ em ordem λ^2 . Assim a equação de CS para $G^{(2)}$ fica:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(P) = 0$$

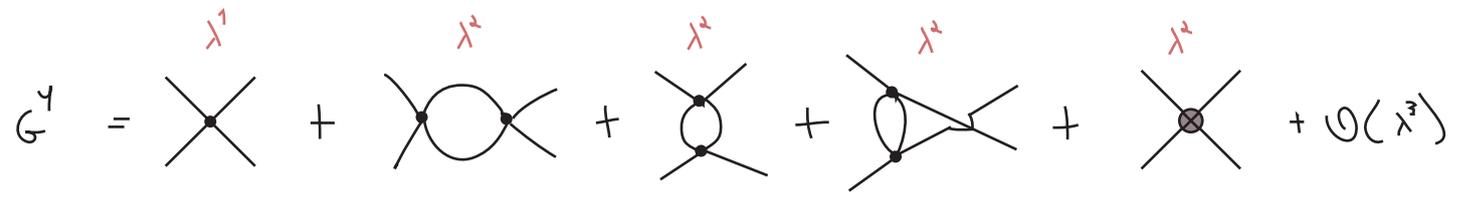
$\gamma(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^2)$
(eq. 150.1)

tem que ser zero em ordem λ

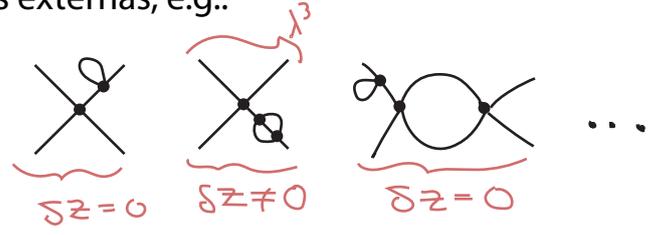
A segunda função mais simples é a função de 4 pontos. Temos:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(P_1, P_2, P_3, P_4) = 0$$

(eq. 150.2)



a menos de loops nas pernas externas, e.g.:



Lembre-se que neste caso estamos falando das funções de Green e não das funções 1PI ou outras funções "amputadas". Só ignoramos estes loops aqui porque, como mostramos acima, os primeiros efeitos em δZ aparecem em ordem λ^2 , e multiplicados pelas potências de λ que já temos aí, vão acabar contribuindo só em ordem λ^3 .

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 164-165):

$$G^4 = \left[-i\lambda + \left[i \Gamma_{\ell}(s) + i \Gamma_{\ell}(t) + i \Gamma_{\ell}(u) \right] - i \delta\lambda \right] \cdot \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2}$$

definido na pg 34, obtido em Dim. Reg. na eq. 51.1

propagadores da pernas externas
(que tem correções $\sim \lambda^2$)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a λ se cancelem em:

$$s_0 = t_0 = u_0 = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta\lambda = \Gamma^{(2)}(s_0, t_0, u_0) = \Gamma_{\ell}(s_0) + \Gamma_{\ell}(t_0) + \Gamma_{\ell}(u_0) = 3 \Gamma_{\ell}(-M^2)$$

(51.1)

$$\delta\lambda = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{E} - L_N \left(\frac{\mu^2 + x(1-x)M^2}{\mu^2} \right) + L_N(4\pi) - \delta_E \right]$$

estamos olhando o caso com $m = 0$

(não precisamos nos preocupar com μ mais, escolhemos escrever as eqs. de CS em termos de M , e μ é eliminado de $G^{(4)}$ quando somamos $\delta\lambda + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u)$)

$$\delta\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^4} \left[\frac{2}{E} - L_N(M^2) + \dots \right]$$

indep de M e finito

Com esta condição, só há dependência de M^2 em $\delta\lambda$, portanto:

$$M \frac{d}{dM} G^4 = M \frac{d}{dM} (-i \delta\lambda) \cdot \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2} = \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2} = \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$M(-i) \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^4} \left(-\frac{2}{M} \right) = \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

Lembrando que (150.1) a função γ é de ordem λ^2 , a equação de CS fica:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right] G^{(4)} = 0$$

$$G^{(4)} = (-i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) \prod \frac{i}{p_i^2}$$

$$\frac{d}{d\lambda} G^{(4)} = (-i + \mathcal{O}(\lambda)) \prod \frac{i}{p_i^2}$$

$$\underbrace{\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \prod \frac{i}{p_i^2}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(1)} \left[\underbrace{-i + \mathcal{O}(\lambda)}_{\mathcal{O}(1)} \right] \prod \frac{i}{p_i^2} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} G^{(4)} = 0$$

tem que ter no mínimo de ordem λ^2

thought bubble:
 $\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$
 $\mathcal{O}(\lambda^0) \Rightarrow [-iA = 0]$
 $\mathcal{O}(\lambda^1) \Rightarrow [A\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} - iB = 0 \Rightarrow \beta = 0]$
 $\mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} - iC = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{(4\pi)^2}$

$$\mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \prod \frac{i}{p_i^2} - i\beta(\lambda) \prod \frac{i}{p_i^2} = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

(eq. 151.1)

Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função γ :

$$\left[M \frac{d}{dM} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^1)} \frac{d}{d\lambda} + 2\underbrace{\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right] G^{(2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} \sim \mathcal{O}(\lambda^3) \\ M \frac{d}{dM} G^{(2)} \sim \mathcal{O}(\lambda^2) \end{cases}$$

$A + \frac{\rho^{(M)}}{2} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)$

$$\mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M \frac{d\rho^{(M)}}{dM} + 2\gamma(\lambda) A = 0$$

$$\Rightarrow \gamma(\lambda) = - \frac{\lambda^2 M}{2A} \frac{d\rho^{(M)}}{dM} \quad \text{(eq. 152.1)}$$

que pode ser obtido calculando

(não faremos aqui)

$$\gamma(\lambda) = \frac{\lambda^2}{12 (4\pi)^2} \quad \text{(eq. 152.2)}$$

De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \underbrace{\text{(leading loop)}}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{---} \otimes \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left[-i p^2 A \left(\frac{2}{\epsilon} + L_N \left(\frac{N^2}{-p^2} \right) \right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} + \dots$$

$\frac{2}{\epsilon}$ & $L_N(N^2)$ têm sempre os mesmos coeficientes, pois em Dim. Reg eles vêm de: $N^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon} - L_N(-p^2) + \dots \right)$

$$\frac{dG^{(2)}}{dM} = -\frac{i}{p^2} \frac{d}{dM} \delta z$$

$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n)$ $\left\{ \begin{array}{l} G^{(n)} \sim \underline{\text{CONST.}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \frac{dG^{(n)}}{d\lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{array} \right.$

n depende de teoria assumiremos

$n \geq 2 \Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre de ordem superior a que envolve γ :

$$\left[M \frac{d}{dM} G^{(2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} + 2\underbrace{\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\text{CONST.} + \mathcal{O}(\lambda^n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \right] = 0 \Rightarrow -\frac{i}{p^2} M \frac{d}{dM} \delta z + 2\gamma(\lambda) \frac{i}{p^2} = 0 \quad \text{(eq. 152.3)}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta z \quad (\text{eq. 153.1})$$

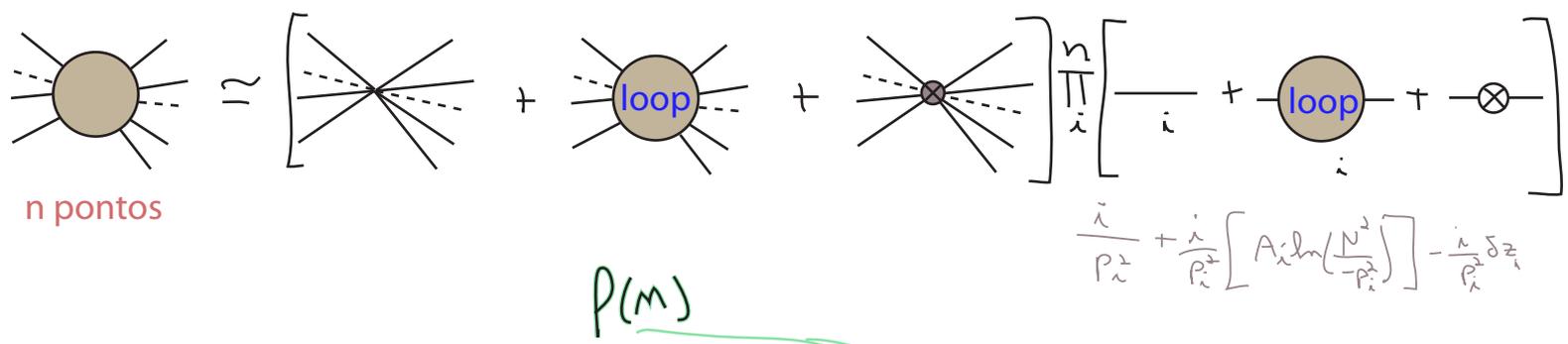
Se lembrarmos que δz satisfaz a condição de renormalização em $-p^2 = M^2$, concluímos que:

$$\left\{ \frac{i}{p^2} \left[-i p^2 A \left(\frac{2}{\epsilon} + \text{LN} \left(\frac{N^2}{-p^2} \right) \right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} \right\}_{p^2 = -M^2} = 0$$

$$\delta z = \frac{2A}{\epsilon} + A \text{LN} \left(\frac{N^2}{M^2} \right) + \text{termos finitos} \quad \beta = \frac{1}{2} M \cdot A \cdot \left(-\frac{2}{M} \right) = -A + \mathcal{O}(\lambda^n)$$

coeficiente do logaritmo que contribui para δz (o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β . Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:



$$G^{(n)} \approx \left(\prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left[-i\gamma - i\beta \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \left[\frac{p^2}{-p^2} \right] \right) - i\delta_\gamma - ig \sum_i \left[A_i \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{N^2}{-p_i^2} \right) \right) - \delta z_i \right] + \dots \right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1 loops))

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo $\sim -M^2$

Podemos então escrever a equação de CS:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + n \gamma(g) \right] G^{(n)}(p) = 0$$

$$n \gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta z_i$$

$$\left(\prod_i \frac{1}{p_i^2} \right) \left\{ M \frac{d}{dM} \left(-i\delta_g + i g \sum_i^n \delta z_i \right) + \beta(g) \frac{dG^{(n)}}{dg} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i \underbrace{G^{(n)}}_{-ig + \mathcal{O}(g^2)} \right\} = 0$$

[$-i + \mathcal{O}(g^2)$]

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a δ_g ou δz_i , mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que δ_g ou $g \delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$$M \frac{d}{dM} \left(-i\delta_g + i g \sum_i^n \delta z_i \right) - i \beta(g) - i g \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i = 0$$

$$\beta(g) = M \frac{d}{dM} \left(-\delta_g + \frac{1}{2} g \sum_i^n \delta z_i \right)$$

(eq. 154.1)

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$$\delta_g = -B \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] + \dots$$

$$\delta z_i = A_i \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] + \dots$$

as partes finitas e independentes de M

$$\beta(g) = -2B - g \sum_i A_i$$

(eq. 154.2)

Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (**de fato somente no coeficiente da divergência**) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logaritmos) igual a $-M^2$. Importante notar que só mostramos isso em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. Todos os passos acima podem ser repetidos quase sem alteração para férmions e bósons de gauge (no caso do fóton, removendo a parte dependente de gauge, veja Peskin, eq. 12.56) No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2$$

(eq. 154.3)

$$\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3$$

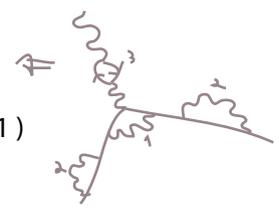
(eq. 154.4)



(154.1) $\beta(g) = M \frac{d}{dM} \left(-\delta_1 + \frac{1}{2} g \sum_i^n \delta_{2i} \right)$



$$\beta(e) = M \frac{d}{dM} \left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3 \right)$$
 (eq. 155.1)



(94.3) $\frac{q^2=0 \rightarrow q^2=-M^2}{m^2=0} \rightarrow \Delta^2(-M^2) = \frac{1}{2}(1-\epsilon)M^2 \rightarrow \delta_3 = -\frac{\alpha}{3\pi} L_N\left(\frac{M^2}{M^2}\right) + \dots$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{12\pi^2} L_N\left(\frac{M^2}{M^2}\right) + \dots$$
 (eq. 155.2)

just follow the 2/ε

(105.2) $\rightarrow \delta_2 = -\frac{\alpha}{4\pi} L_N\left(\frac{M^2}{M^2}\right) + \dots$ (IR divergences could be here, but have been removed by the appropriate diagrams)

$$\overset{W.T.}{\delta_1} \delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{M^2}{M^2}\right) + \dots$$
 (eq. 155.3)

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M} \right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$
 (eq. 155.4)
$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

(155.1) \downarrow
$$\beta(e) = M \left[\frac{e}{2} \frac{d}{dM} \left(-\frac{e^2}{12\pi^2} \left(-\frac{2}{M} \right) \right) \right] \Rightarrow \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$$
 (eq. 155.5)

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge (logo o mesmo vale para δ_1), δ_3 e β são invariantes (ligados à polarização do vácuo).

O significado de γ e β

Vamos tentar entender γ e β , escrevendo-os em termos dos parâmetros da Lagrangiana nua:

$\lambda\phi^4$: $\phi(p) = z^{-1/2}(m) \phi_0(p)$

$m \rightarrow m + \delta m \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + \delta\eta \phi$

$\phi' = (1 + \delta\eta)\phi \left\{ \begin{aligned} \phi' &= z^{-1/2}(m + \delta m)\phi_0 \\ \phi &= z^{-1/2}(m)\phi_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{z^{-1/2}(m + \delta m)\phi_0}{z^{-1/2}(m)\phi_0}$

$\delta\eta = \frac{z^{-1/2}(m + \delta m)}{z^{-1/2}(m)} - 1$

Da definição de γ (eq 148.4) temos:

$\gamma = -\frac{m}{\delta m} \delta\eta = -\frac{m}{\delta m} \left(\frac{z^{-1/2}(m + \delta m)}{z^{-1/2}(m)} - 1 \right) = -\frac{m}{z^{-1/2}} \left(\frac{z^{-1/2}(m + \delta m) - z^{-1/2}(m)}{\delta m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{z^{-1/2}} \frac{\partial z^{-1/2}}{\partial m}$

$\gamma = \frac{1}{2} \frac{m}{z} \frac{\partial z}{\partial m}$ (eq. 156.1)

$\sim \frac{1}{2} m (1 - \delta_z + O(\delta_z^2)) \frac{\partial \delta_z}{\partial m}$

mostra a ligação entre γ e a mudança de Z

que reproduz o resultado em L.O. de 153.1, mas agora temos 156.1 válido em qualquer ordem

No caso de β , nossa definição original já era suficientemente clara (eq 148.3):

$\beta = \frac{m}{\delta m} \delta\lambda \dots \left\{ \begin{aligned} m &\rightarrow m + \delta m \\ \lambda(m + \delta m) &= \lambda(m) + \delta\lambda \end{aligned} \right.$

$\beta = m \frac{\partial}{\partial m} \lambda(m)$ (eq. 156.2)

, o que mostra que β nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos conectar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$Dim[G^{(2)}] = Dim\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2} g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right) = -\frac{i}{k^2} g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

tem dimensão -2 e só depende de p e M

$$Dim[g] = 0$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \circ \quad k^2 = -p^2 > 0$$

número (e não um quadrivetor)

$$\left. \begin{aligned} x \equiv \frac{k}{M} \rightarrow \frac{d}{dM} f(x) &= \frac{dx}{dM} \frac{df(x)}{dx} = -\frac{k}{M^2} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k} \frac{df}{dM} \\ \frac{d}{dk} f(x) &= \frac{dx}{dk} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = M \frac{df}{dk} \end{aligned} \right\} \frac{df}{dM} = -\frac{k}{M} \frac{df}{dk}$$

$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -M \frac{i}{k^2} \left(\frac{d}{dM} g \right) = -\frac{i}{k^2} \left(-k \frac{d}{dk} g \right) = -k \left[-\frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left(-\frac{i}{k^2} g \right) = +\frac{2i}{k^2} g - \frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g$$

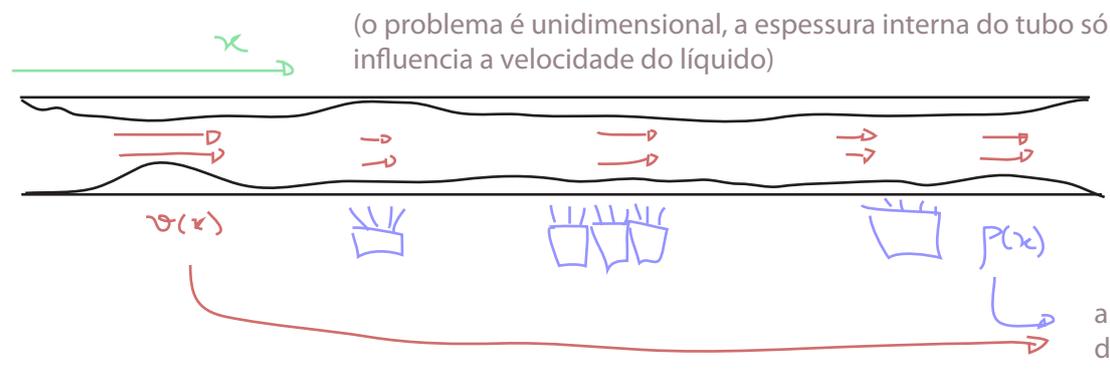
$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -k \left[\underbrace{\frac{d}{dk} \left(-\frac{i}{k^2} g \right)}_{G^{(2)}} - \frac{2i}{k^2} g \right] = -k \left[\frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)} \right] = \left[-k \frac{d}{dk} - 2 \right] G^{(2)}$$

$$CS: \left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0} \quad (eq. 157.1)$$

Teoria livre: $\beta = \gamma = 0 \quad k \frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). (esta analogia é devida a Coleman) Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade $v(x)$ (x é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade $D(t,x)$ e cuja taxa de crescimento é $\rho(x)$



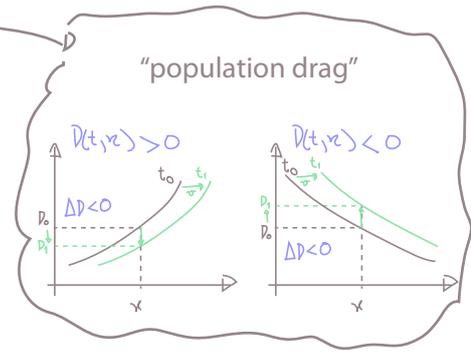
a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

as bactérias são arrastadas

$$\frac{d}{dt} D(t, x) = -v(x) \frac{d}{dx} D(t, x) + P(x) D(t, x)$$

crescimento

$$\hookrightarrow \left[\frac{d}{dt} + v(x) \frac{d}{dx} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$



Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

(eq. 157.1)

$$\left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$$

$\int \text{Log} \left(\frac{k}{M} \right) \leftrightarrow t$
 $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk$ $\frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$
 $\lambda \leftrightarrow v$
 $-\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x)$
 $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$
 $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

(eq. 158.1)

Suponha que conheçamos: $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em $(t_1 > 0, x_1)$ temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em $t = 0$ integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

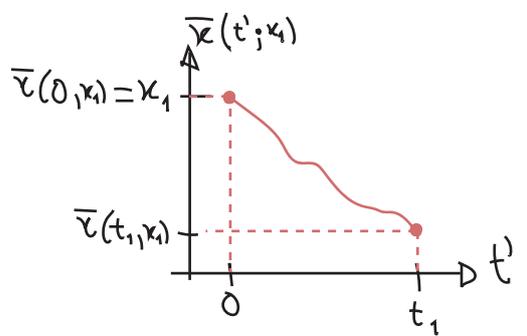
$$\frac{d}{dt'} \bar{x}(t'; x_1) \equiv -v(\bar{x})$$

$(t = t_1 \leftrightarrow t' = 0)$
 $(t = 0 \leftrightarrow t' = t_1)$

→ posição de um elemento de fluido indo na direção errada (-v)

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$ → este começa em x_1

$\bar{x}(t_1; x_1)$ → posição dele em $t = 0$



Portanto a densidade bacteriana inicial dele era: $D_i(\bar{x}(t_1; x_1))$

E a densidade em (t_1, x_1) será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right] \quad (\text{eq. 159.1})$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:
 $\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$

$d\bar{x}' = -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}'$ $t'=0 \rightarrow \bar{x}' = x_1$
 $t'=t_1 \rightarrow \bar{x}' = \bar{x}(x_1, t_1)$
 sinal compensado nos limites de integração

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[\int_{\bar{x}(t_1, x_1)}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

notação

Voltando ao mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 158.1 temos:

$L_N(\frac{k}{M}) \leftrightarrow t$
 $\lambda \leftrightarrow x$
 $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow P(t, x)$
 $-\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x)$
 $2\gamma(\lambda) \leftrightarrow P(x)$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=0 \leftrightarrow k=M \\ D_i(x) = P(t=0, x) \leftrightarrow G^{(2)}(M, \lambda) \equiv \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{array} \right.$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \cdot \left[2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 159.2})$$

redefino $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}$

$\text{Exp} \left[-2 \int_M^k d[L_N(\frac{k'}{M})] \right] = \frac{M^2}{k^2}$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 159.3})$$

Esta é outra RGE!

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda \quad (\text{eq. 160.1})$$

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1$$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos $t = 0$ para agora e $t = t_1$ para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como $k = M$).

Note que a taxa de mudança é dada pela função β

Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida G_i é obtendo a função $G^{(2)}$ em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 159.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{PERT.}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \iff G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{(159.3)}{=} -\frac{\lambda}{M^2} G_i^{(2)}(\underbrace{\bar{\lambda}(k=M; \lambda)}_{\lambda})$$

$$\therefore G_i^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \rightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow \left. \begin{aligned} p_i^2 &= -P^2 > 0 \\ p_i \cdot p_j &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(os quatro momentos são spacelike)} \\ & s, t, u = -P^2 \end{aligned}$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante P^2 e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^4}\right)^4 g\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$D_{im}[G^{(4)}] = -8 \quad D_{im} = -8 \quad D_{im} = 0$

$$\left[\underline{P} \frac{\partial}{\partial \underline{P}} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - 4 \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(\underline{P}, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(\underline{P}, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{P^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(\underline{P}; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^{\underline{P}} d[L_N \left(\frac{P'}{M} \right)] r[\bar{\lambda}(\underline{P}; \lambda)] \right\} \tag{eq. 161.1}$$

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(\underline{P}, \lambda) = -\lambda \lambda \left(\frac{\lambda}{P^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G^{(4)}(\underline{P}, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{P^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(\underline{P}, \lambda))$$

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(\underline{P} = M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda(M)) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2) \tag{eq. 161.2}$$

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. De uma forma geral, qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai depender de duas grandezas:

$\lambda \leftrightarrow$ Constante de acoplamento

$L_N \left(-\frac{P^2}{M^2} \right) \leftrightarrow$ Grandeza adimensional que mede a "distância" entre p e $\lambda = \bar{\lambda}(M)$

Para que a perturbação faça sentido **precisamos que λ seja pequeno, mas também temos que evitar que**

$$\left| \frac{P^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros (λ e o logaritmo de p) em uma função do acoplamento (G_i) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência M . Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala M) vemos que $G_i^{(n)} = G^{(n)}$, mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 159.3 e 161.1 nos dizem é que **devemos substituir λ por um acoplamento mais apropriado para aquela escala: $\bar{\lambda}$** , o que reforça a ideia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 161.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a $\bar{\lambda}$.

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança destas vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 159.3 e 4 para 161.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter $\bar{\lambda}$ no caso da teoria $\lambda\phi^4$

(151.1) $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

(160.1) $\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{\lambda}}{d[\ln(\frac{k}{M})]} = \frac{3}{(4\pi)^2} \bar{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{k}{M}\right) \end{cases}$$

$C = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{k}{M}\right) \rightarrow \boxed{\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{k}{M}\right)}} \quad (\text{eq. 162.1})$$

Esta expressão é exatamente o que obteríamos na Leading Log Resum. (veja eq 144.3 para o caso da QED) mas aqui não fizemos qualquer soma de funções 1PI, a RGE nos dá direto a solução ressomada e indica que termos "ruins" (tal como o $\alpha^3 L_N^2$ que comentamos na pg 144) não aparecerão. Se tivéssemos calculado β em ordem λ^3 , isso seria incorporado ao running consistentemente (sem que precisássemos ficar nos preocupando com o que somar na função 1PI). Note que, expandindo em λ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{k}{M}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{1}{g}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (141.1)$$

$k = \frac{1}{g} M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 141 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função β positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em λ , temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 L_N\left(\frac{k}{M}\right) + C^2 \lambda^3 L_N^2\left(\frac{k}{M}\right) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left(\frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para k muito longe de M . Para o caso em que o **acoplamento efetivo é pequeno** (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 162.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na constante de acoplamento. Desta forma, qualquer problema que possa vir do tamanho dos logs será traduzido no tamanho do acoplamento efetivo, e assim **este passa a ser o nosso parâmetro de expansão**.

Aplicação para QED

(Peskin 12.3)

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 147 a 149), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável, **sua normalização é física** e, portanto, não temos a função γ (não há fatores de Z como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte RGE (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(e_n) \frac{d}{de_n} \right] V(q; M, e_n) = 0 \quad \text{RGE para o potencial}$$

$$Dim = -2$$

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 157 e trocar a derivada em M por derivadas em q

$$\left[q \frac{d}{dq} - \beta(e_n) \frac{d}{de_n} + 2 \right] V(q; M, e_n) = 0$$

Lembrando que:

$$(eq. 157.1) \Rightarrow \left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{E} \times \text{r} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[L_N \left(\frac{k'}{M} \right) \right] \Phi \left[\bar{\lambda}(k'; \lambda) \right] \right\} \quad (eq. 159.3)$$

$$V(q; M, e_n) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_n)) \quad (eq. 163.1)$$

$$\Downarrow \bar{e}(q; e_n) \Rightarrow \frac{d}{d \left[\text{Log} \left(\frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_n) = \beta(\bar{e}) \quad \bar{e}(M; e_n) = e_n \quad (eq. 163.2)$$

$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e, portanto, os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* (Z), que somem de qualquer elemento de matriz S. São chamadas de **QFTs finitas**. (por exemplo teorias de Super Yang-Mills)

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função β da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

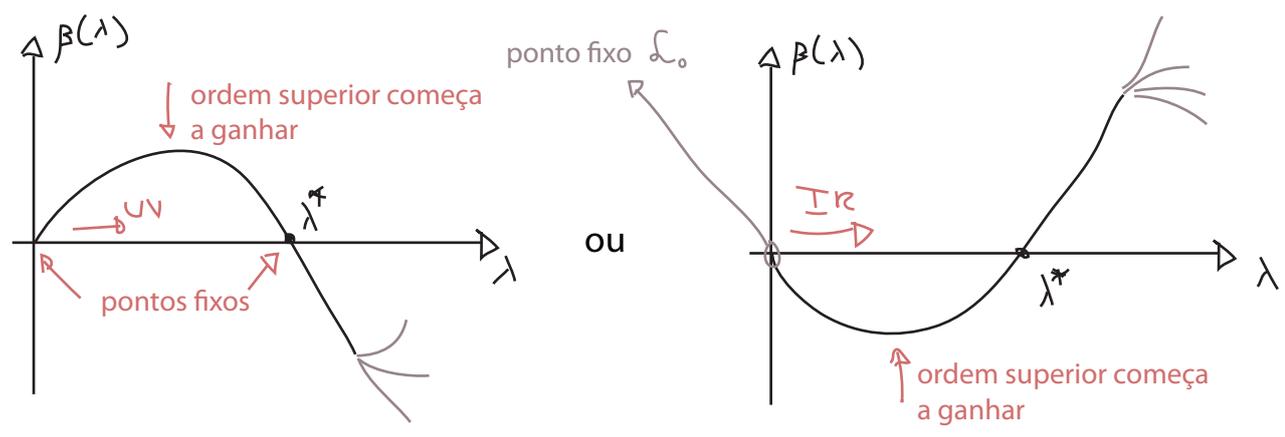
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para β positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função β , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de β , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas **suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto**. Neste caso poderíamos obter funções β da seguinte forma:

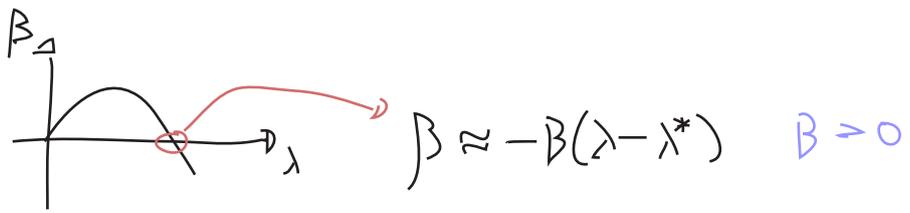


Quando $\bar{\lambda}$ chega perto deste ponto λ^* , β vai para zero e a constante de acoplamento para de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso $\beta(\lambda \sim 0) > 0$, com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

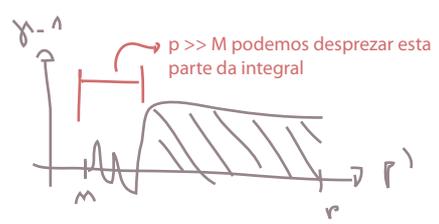
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$ } e a velocidade é determinada pela inclinação local de β

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 159.2 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[\gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para p grande a integral será dominada por $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1-\gamma(\lambda^*)}$$

$$\text{Exp} \left\{ \text{Ln}\left[\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^{\gamma-1}\right] \right\}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de p^2 , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos $\gamma(\lambda^*)$ de **dimensão anômala** do campo (de fato a função γ acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

Renormalização de Operadores Locais

(Peskin 12.4, Schwartz 23.4)

As RGEs deduzidas e resolvidas acima estavam restritas a teorias em $d = 4$ contendo apenas operadores de dimensão 4, ou seja, todos os coeficientes de Wilson eram adimensionais (e por consequência, não tínhamos termos de massa ou interações não renormalizáveis). Queremos agora generalizar o método para incluir quaisquer operadores em um número arbitrário de dimensões, e **o primeiro passo é incluir a renormalização e o running de Operadores Locais**. Por operadores locais, nos referimos a operadores compostos dos campos na Lagrangiana, tipicamente incluídos no cálculo para representar fatores externos à dinâmica do modelo. Por conta disso estes operadores (frequentemente chamados de **Operadores Externos**) não aparecem na Lagrangiana, sua presença influencia o sistema mas eles próprios não são influenciados de volta, se têm alguma dinâmica ela é prefixada, uma condição de contorno externa ao sistema. Isso aparece em TQC em alguns casos, um que já vimos é a existência de um campo externo:

$$\langle p' | i T | p \rangle = -i e \int d^4x A_\mu(x) \langle p' | T \{ \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \} | p \rangle$$

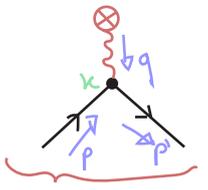
$\langle p' | i T | p \rangle$ Espalhamento $1 \rightarrow 1$ de um elétron em um campo externo A
 $\int d^4x A_\mu(x)$ Função clássica (não estou quantizando A) e externa ao sistema (estou desprezando a mudança no campo induzida pelo elétron)
 $\langle p' | T \{ \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \} | p \rangle$ $\langle j^\mu(x) \rangle$

Note que só precisamos calcular em TQC **o elemento de matriz do operador local $j_\mu(x)$** , o que pode ser feito em uma teoria de férmions livres (a Lagrangiana de Dirac). O operador j_μ é escrito em termos dos operadores $\psi(x)$, mas nem A_μ nem j_μ aparecem na Lagrangiana e o cálculo quântico acaba se reduzindo a:

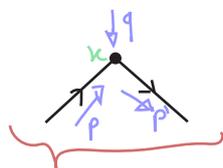
$$\langle j^\mu(x) \rangle \sim \langle \Omega | T \{ j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$

Responsáveis pela criação/aniquiação dos estados finais/iniciais

Uma consequência dessa abordagem é que no vértice em x , além dos momentos dos dois férmions, entra também **o momento externo** (trocado com o campo clássico A). Em termos de diagramas de Feynman, temos duas formas de indicar isso:



Deixa claro o que acontece com o momento, mas é fácil errar pensando que temos que incluir um propagador para o fóton



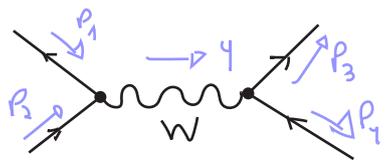
Deixa claro que não há fótons (não quantizamos A), mas é fácil ficar se preocupando à toa com a não-conservação de momento em x

Outra situação em que podemos nos interessar em olhar um operadores deste tipo é quando "integramos fora" alguma partícula, no espírito da renormalização de Wilson. Considere a Lagrangiana de interação:

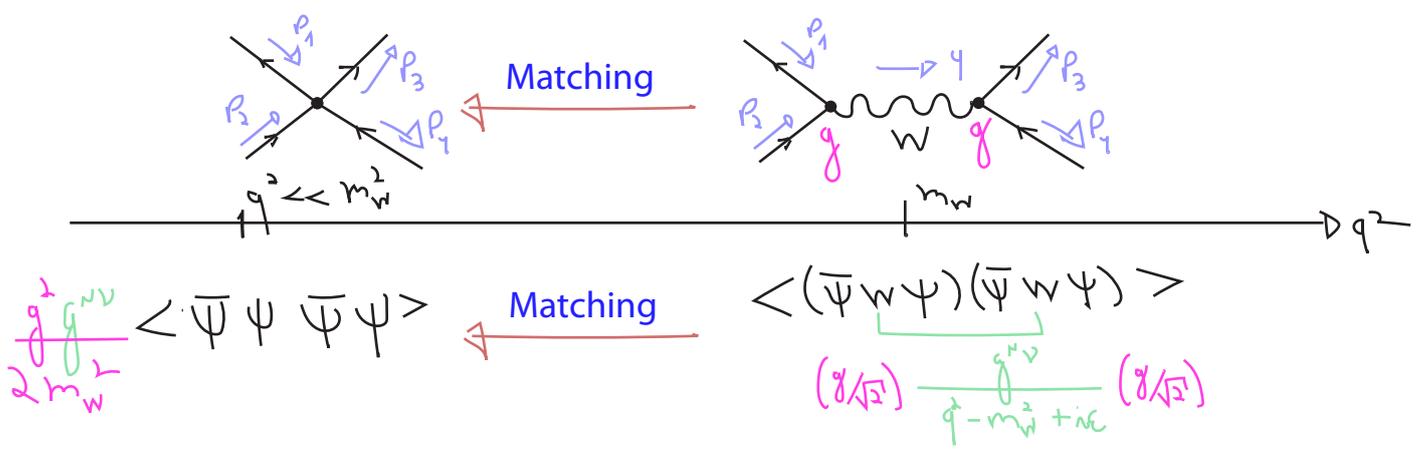
$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi$$

bóson de massa m_W → propagador $\frac{-i g^\mu \nu}{q^2 - m_W^2 + i\epsilon}$

Um espalhamento possível é o seguinte:



mas é fácil se convencer que, se a massa do m_W é muito maior que todas as escalas envolvidas (muito maior que os momentos p_i e, portanto, bem maior que q e que a massa do férmion), existe um regime de baixas energias em que podemos fazer com as excitações do campo W o mesmo que fizemos com os modos produzidos por $\hat{\phi}$ na página 132: **embutir todos efeitos das linhas internas de W 's nos coeficientes de Wilson de operadores envolvendo só os campos ψ** . Nesse caso nem há um loop a calcular, basta notar que se fizemos $q \ll m_W$ no diagrama acima:



De forma que obtemos o operador: $\hat{O}(x) = \bar{\Psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi \bar{\Psi} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Psi$

com o coeficiente de Wilson calculado acima (este processo de obter coeficientes a partir de uma teoria mais completa no UV é chamado de "matching"). De novo podemos calcular o efeito desta interação em uma teoria de férmions livres, contraindo o operador com o campo fermiônico:

$$\langle \Psi(p_1) \bar{\Psi}(p_2) \Psi(p_3) \bar{\Psi}(p_4) \hat{O}(0) \rangle = \text{diagrama de contato}$$

Mas nesse caso o operador não introduz nenhum momento externo. Note que nesse caso poderíamos continuar trabalhando com a teoria contendo W 's, mas em baixas energias **é mais simples usar a teoria efetiva**. Há casos, no entanto, em que encontramos experimentalmente interações mediadas por operadores de dimensão > 4 e não sabemos qual é a teoria que os gera no UV. Isto não impede de ver como estes operadores são renormalizados, basta medir o coeficiente de Wilson em uma escala específica (ao invés de fazer o matching).

Finalmente, podemos estar interessados na renormalização de operadores locais simplesmente para organizar a informação de forma compacta. Qualquer produto de campos vai sofrer mudanças decorrentes das redefinições feitas para renormalizar a teoria (fatores "Z" advindos dos campos e do acoplamento) e é conveniente organizar este produto de Z's em uma única variável. Vejamos como isto funciona na prática, com uma teoria escalar:

$\mathcal{O}(x) \equiv$ operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, reescrevendo a Lagrangiana de forma a obter um contratérmo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

$$\mathcal{O}_M \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \mathcal{O}_0$$

↗ "renormalized"
↖ "bare"

que garante o operador renormalizado \mathcal{O}_M satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de Green em que estamos interessados é:

$$G^{(n,1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_M(k) \rangle$$

notação: $G^{(n,j,m)}$
 função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nus, temos:

$$G^{(n,1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z^{-n/2}(M) Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n,1)} = 0$$

(eq. 169.1)

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \equiv M \frac{d}{dM} L_n[Z_{\mathcal{O}}(M)] = \frac{M}{Z} \frac{\partial Z_{\mathcal{O}}}{\partial M}$$

(compare com 156.1) (eq. 169.2)

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^{\mu} \mathcal{D}^{\nu} + \gamma^{\nu} \mathcal{D}^{\mu}] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda}$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores $\{\mathcal{O}^i\}$ de forma que:

$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_0^{ij}(M) \mathcal{O}_M^j$$

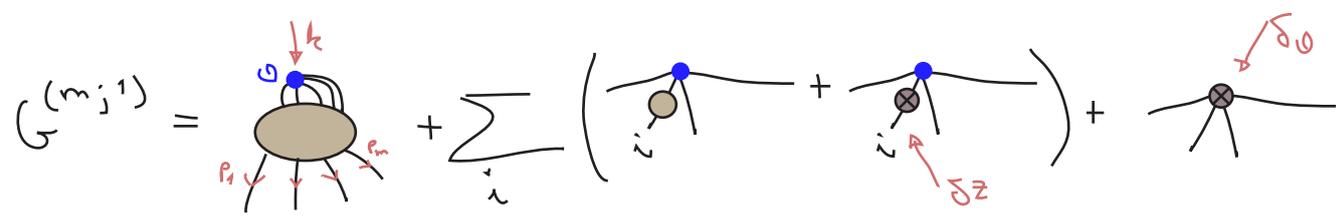
o que também transforma a dimensão anômala γ em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_0^{-1}(M)]^{ik} M \frac{d}{dM} [Z_0(M)]^{kj}$$

(para um exemplo explícito disso, veja a seção 18.2 do Peskin, começando na eq. 18.51)

Para obter uma expressão para γ , calculemos a função de Green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_M(k) \rangle$$

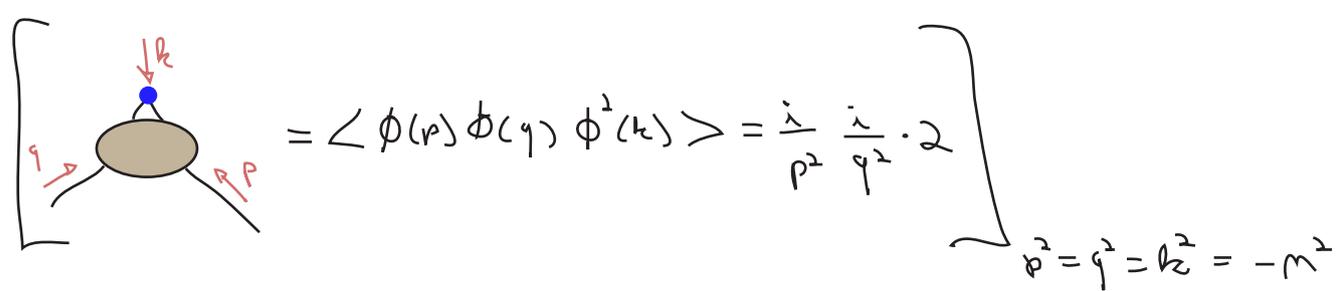


Usando a mesma lógica das páginas 153 a 154, se esta função de Green obedece às equações de CS (eq 169.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 170.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador ϕ^2 em uma teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que recebe uma contribuição de ϕ^4 que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de Green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por (isso é um truque para introduzir a massa perturbativamente, mas note que estamos incluindo uma massa running, como a que aparece no esquema MS):



A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é:

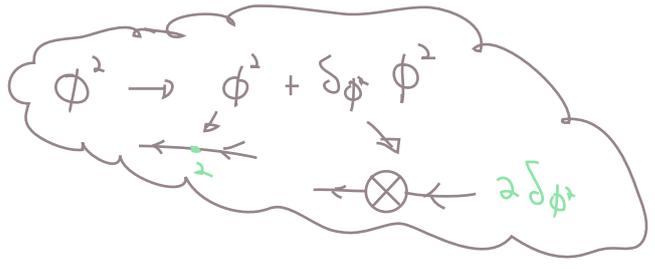
$$\text{Diagram} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (-i\lambda) \frac{i}{l^2} \frac{i}{(k+l)^2} =$$

vou ignorar o μ^e que concerta a dimensão do acoplamento, uma vez que já vou impor condições de renormalização que somem com ele. A consequência é que teremos $\text{Ln}(M^2)$ por aí

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[-\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em $-M^2$ este loop deve ser cancelado por:



$$\text{Diagram} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 171.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em $\lambda\phi^4$ não temos contribuição de ordem λ para δz , então:

(eq. 170.1 com $\frac{d}{dM}(\delta z) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$)

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 171.2})$$

Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$ Lagrangiana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 169.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0$$

(eq. 171.3)

Se escrevemos:

$$G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$$

aparece da mesma forma que o $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$ (pgs 147-149), só que com o número de inserções do operador (l) ao invés do número de operadores do campo escalar (n)

Então: $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_l l (m^2)^l G^{(n);l}$

de forma que a seguinte equação garante 171.3 para cada ordem de m^2 :

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\phi m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 172.1})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d[\log(p/m)]} \bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda}) \bar{m}^2(p) \iff \bar{m}^2(M) = m^2$$

O running da massa vai depender essencialmente da **dimensão anômala do operador ϕ^2** na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 172.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$d_i \equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i]$$

$$\downarrow$$

$$C_i = \rho_i M^{4-d_i} \quad (\text{eq. 172.3})$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\rho_i] = 0$$

estamos introduzindo uma dependência em M
esta nova dependência é compensada por ρ_i

Com isso 172.2 fica:

$$\left[m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

$\dots + \underbrace{\text{---} \circ \text{---}}_{f(m)} + \dots + \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\text{---} \circ \text{---}} + \dots$

(antes a dep. em M estava só aqui)

$M \frac{d}{dM} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\text{---} \circ \text{---}} \right) \sim (4-d_i) M^{4-d_i} \rho_i$

$(d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \left(\frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\text{---} \circ \text{---}} \right) \sim (d_i - 4) M^{4-d_i} \rho_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

$$\left[m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{ \rho_i \}; M, \lambda, \{ \rho_i \}) = 0 \quad (\text{eq. 173.1})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais) ρ_i , aparecem com a mesma forma de λ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades β e β_i . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 173.2})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contra-termos} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\psi) \Rightarrow \rho_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \dots \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de γ_i para β_i (γ_i depende de ρ_i ou λ , portanto $\gamma_i \rho_i \sim O(\text{pert}^2)$); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = [d_i - \gamma] \bar{\rho}_i \rightarrow \beta_i(\bar{\rho}_i) = (d_i - \gamma) \bar{\rho}_i + \underbrace{\delta_i \bar{\rho}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left(\frac{\rho}{m} \right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis **em quatro dimensões**) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em d dimensões, temos que tomar cuidado com o termo $\lambda \phi^4$, que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2} \quad \text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' m^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$Dim[\phi_m^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2$ (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4!} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$

para outros operadores basta trocar: $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$ \rightarrow dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em d dimensões. O cálculo que fizemos para $\int \phi^2$ muda da seguinte forma, para d próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \text{Log}(M^2) + (d-4) \left[-\frac{1}{4} \text{Log}^2(M^2) - \frac{1}{2} \gamma \text{Log}(M^2) \right] + \dots + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

indep de M

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4) \left[-\gamma - \text{Log}(M^2) \right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

(de novo, estou ignorando o μ que normalmente está presente em Dim. Reg.)

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d-4)$$

\rightarrow o que tínhamos antes (em $d = 4$, eqs. 171.1 e 171.2)

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[2 - \mathcal{O}(d-4) \right] = \left[\gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right] \quad \gamma_{\phi^2}^{(4)} = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d-4) \sim 0 \quad \beta_i(d-4) \sim 0 \quad \beta_m = \left(-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} \right) P_m + \dots \quad (\text{eq. 174.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções: $\beta_i = \left[d_i - d + \gamma_i^{(4)} \right] P_i + \dots$

No caso da função β temos um contribuição da dimensão de massa de λ :

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 174.2})$$

$$\beta = (d-4)\lambda + M^{d-4} \mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\text{Log}(M) + \dots) \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$\lambda^2(d-4) \sim 0$
 $\uparrow \cdot \mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)$

modificando o que há na pg 151 $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow \left[M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda} + \dots \right] G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[\lambda(d-4) M^{4-d} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] = 0$
introduziu a ordem λ^1 (que antes era nula)

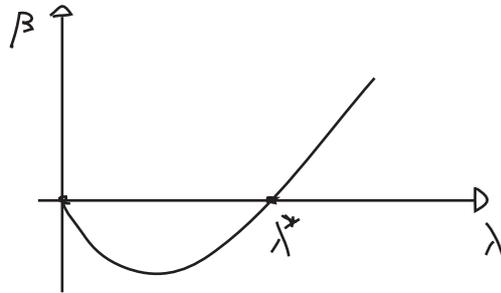
Usando o resultado 151.1: $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(\gamma - \delta)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$\delta \geq \gamma \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / \rho \rightarrow 0$$

$$\delta < \gamma \Rightarrow$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (\gamma - \delta)$$

(eq. 175.1)

o que é o comportamento que previmos na pág. 142, com um ponto fixo em λ^* (de fato, se você usar a equação 142.1 para determinar a posição de λ^* e tomar o termo linear em $(4-d)$, verá que este coincide com o valor acima)

Conexão com matéria condensada e expoentes críticos

(Peskin 8 and 12.5; Schwartz 23.5.2)

O último ponto da renormalização que queremos abordar é a conexão com a física de matéria condensada, que muitas vezes oferece casos claros do que está acontecendo. Um bom exemplo de um sistema que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. Assumindo um material simples, que tem **um eixo preferido para magnetização**, podemos medir a densidade de magnetização em cada ponto usando apenas um número. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[\underbrace{\frac{1}{2} (\nabla s)^2}_{\text{densidade de spins}} + \underbrace{b(T - T_c)}_{\text{constantes}} s^2 + \underbrace{c}_{\text{constantes}} s^4 - \underbrace{H s}_{\text{campo magnético externo}} \right]$$

a densidade de spin $s(x)$ faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo H é uma fonte. Nesse caso é bastante óbvio que **existe um cut-off físico**, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

(note que fixei os graus de liberdade)

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema e nos convencer que o funcional G acima está correto.

Como se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização, a **baixa temperatura**, e na ausência de um campo externo, teremos duas opções igualmente favorecidas para a magnetização total:

$T \sim 0$
 $H = 0$ } \rightarrow Magnetização M paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

Já na presença de um campo externo, uma é favorecida

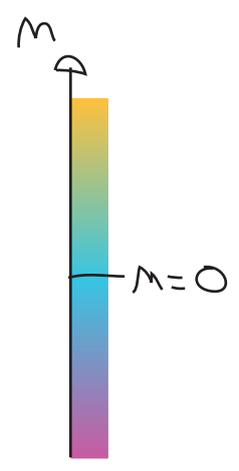
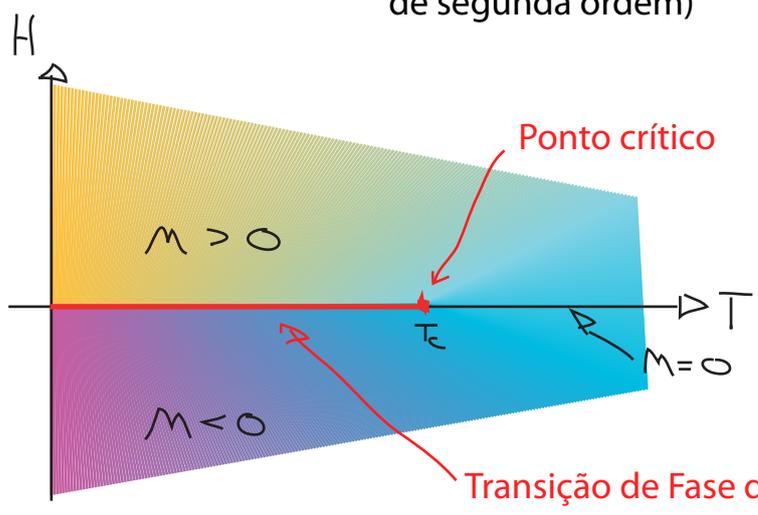
$T \sim 0$
 $H \neq 0$ } \rightarrow $H > 0$ Favorece M paralelo e $H < 0$ antiparalelo.

Mudança de H pequeno e negativo para pequeno e positivo } \rightarrow Mudança descontínua em M
 $T \sim 0$ } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$ Spins cada vez mais desordenados $|M|$ vai diminuindo

$T \gg T_c$
 $H = 0$ } $\rightarrow M = 0$

\hookrightarrow Valores grandes de H ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de $H = 0$ desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ($M > 0$ e $M < 0$) coexistem em equilíbrio. M é o meu **parâmetro de ordem** e a energia livre de Gibbs (que só depende de M e T) é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico M é pequeno e podemos expandir $G(M)$ como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 \quad (\text{eq. 177.1})$$

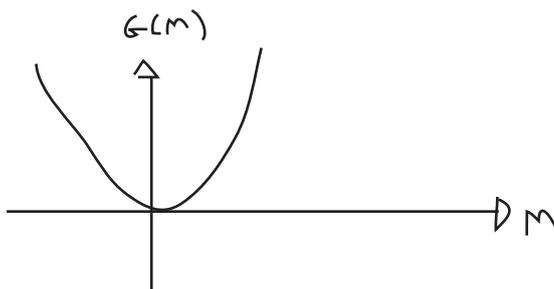
o sistema é simétrico por mudança no sinal de M, então G(M) tem que ser par (aqui entra a simetria)

Para encontrar o estado do sistema em H = 0, devemos minimizar G:

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

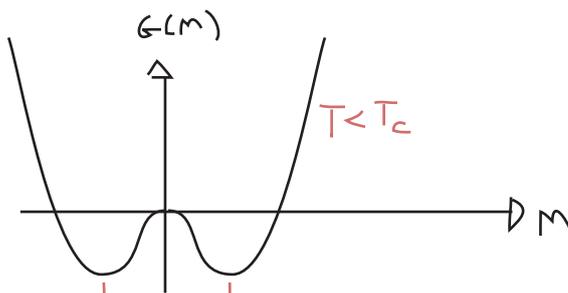
Resta fixar B e C, suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se B puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{matrix} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

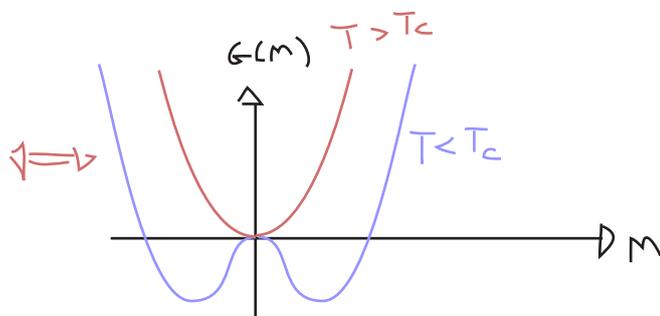
$$B(T) = b(T - T_c) \quad C(T) = c \quad b, c > 0 \quad (\text{eq. 177.2})$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \left[\frac{b}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} & T < T_c \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para H não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a M): $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para $H = 0$ e $T < T_c$. Substituindo a definição de M , e as expressões para $B(T)$ e $C(T)$ (177.2) na energia de Gibbs (177.1), obtemos a expressão com a qual começamos a discussão:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar (escolhendo a normalização de s para aparecer o fator 1/2)

Suponha que: $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$ } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de x . Procurando o mínimo de G em relação a configurações do campo s obtemos:

$$0 = \delta G[s(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c)s + 4cs^3 - H$$

$$T > T_c \Rightarrow \kappa \neq 0 \Rightarrow s < 1 \quad M \sim 0 \quad s^3 \sim 0 \quad \Rightarrow \quad (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) s(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo $s(x)$ que surge quando o spin em $x = 0$ é forçado a se alinhar com H

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + \underbrace{2b(T - T_c)}_{\left(\frac{1}{\xi}\right)^2}} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}$$

muito parecido com um potencial de Yukawa, não?

comprimento de correlação $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$ (eq. 178.1)

É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes b e c , que são dados pela física no UV (física atômica), **estes dois coeficientes podem ser medidos em baixas energias**. Por outro lado, a lei de potência em $(T - T_c)$ só depende de podermos expandir G em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**. É a separação de escalas se manifestando novamente.

Note que o valor de $s(x)$ estará ligado ao valor em $x=0$ dependendo de quão longe ele está de $x = 0$. A escala de "longe" é dada por ξ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - **o sistema desenvolve correlações a longas distâncias**. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar (mais propriamente deveríamos chamar de quasi-partícula) que carregaria a informação da existência da fonte em $x = 0$, e que a "massa" desta quasi-partícula (ξ^{-1}) é da ordem de $[b(T-T_c)]^{1/2}$. Se estivermos longe da temperatura crítica $T \gg T_c$, então o único parâmetro que determina a massa é $B(T)$, que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de m é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que $m \sim \Lambda$, que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico e portanto, longe do ponto crítico, somente spins vizinhos tem correlações relevantes.

Outra fato importante é que a "massa" que estamos falando aqui **nada tem a ver com a relação de dispersão relativística**. Ela não é o polo de alguma partícula entrando on-shell, mas simplesmente o coeficiente de Wilson do termo quadrático no campo $s(x)$. **Aqui vemos um exemplo bastante claro para a interpretação física de uma running mass**, este coeficiente controla a forma do potencial 177.1, determina as correlações de dois pontos e é bastante natural esperar que ela mude com a escala (e a temperatura). Por isso podemos usar tudo que fizemos para o campo escalar em $\lambda\phi^4$ para estudar o comportamento de 177.1, partindo de 174.2 podemos obter a evolução do parâmetro de massa em $\lambda\phi^4$:

$$\beta_m = (-2 + \gamma_\phi^{(4)}) \beta_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(1/\mu)} \bar{\beta}_m = \beta_m(\bar{\beta}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_\phi^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{\beta}_m \quad (\text{eq. 171.2})$$

Olhando perto do ponto fixo Gaussiano:

$\lambda = 0$
 $(\gamma = 0)$

 $\Rightarrow \frac{1}{\beta_m} d\bar{\beta}_m = -2 d[\text{Log}(1/\mu)] \Rightarrow \bar{\beta}_m = \beta_m \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \quad (\text{eq. 179.1})$

Lembrando que (veja definição de p em 172.3)

$$\beta_m = \frac{m^2}{\mu^2} \Rightarrow \bar{\beta}_m = \frac{m^2}{p^2}$$

O que apenas nos diz que quando $p \sim m$ o termo de massa se torna importante (e é pouco importante para $p \gg m$) e esperamos que correlações de longa distância sejam controladas por este coeficiente de Wilson. Podemos definir esta região de momento por:

$$\bar{\beta}_m(p_0) \equiv 1 \Rightarrow \frac{m^2}{p_0^2} = 1 \Rightarrow p_0^2 = m^2 \Rightarrow p_0 = \beta_m \mu^2$$

esse valor de "1" para coeficientes adimensionais é frequentemente **chamado de "natural"**. E o comprimento de correlação será dado por este momento:

$$\xi \sim p_0^{-1} = m^{-1} = \mu^{-1} \beta_m^{-1/2} \quad \text{nada fora do esperado aqui, note que (178.1): } \xi \sim (T - T_c)^{-1/2}$$

Há um comportamento muito mais interessante perto do ponto fixo não trivial, no entanto. Usando o mesmo critério para definir ξ perto do ponto fixo λ^* (obtido em 175.1), obtemos:

$$\bar{\lambda} = \lambda^*$$

$$\frac{d}{d[\log(\mu/\mu_0)]} \bar{P}_m = (-2 + \nu_{\phi^2}(\lambda^*)) \bar{P}_m \Rightarrow$$

$$\bar{P}_m = P_m \left(\frac{M}{P} \right)^{2 - \nu_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 130.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left(\frac{M}{P_0} \right)^{2 - \nu_{\phi^2}(\lambda^*)} V^{-1} = 1 \Rightarrow P_0 V^{-1} = P_m M^{V^{-1}} \Rightarrow P_0 = P_m^V M$$

$$\xi \sim P_0^{-1}$$

note que esta escolha "1" não muda nada, se tivéssemos fixado para um valor "A" teríamos:

$$\bar{P}_m(P_0) = A \Rightarrow P_0 = \frac{M}{A} P_m^V \Rightarrow \xi \sim \frac{A}{M} P_m^{-V}$$

e "M" também é uma escala arbitrária

$$\xi \sim M^{-1} P_m^{-V}$$

$$\nu_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad 171.2$$

$$\lambda^* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d) \quad 175.1$$

$$V^{-1} = 2 - \nu_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que P_m é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e v mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-v}$$

$$v = \frac{1}{2 - \frac{1}{3}(4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]}$$

$$v \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

contruindo uma teoria escalar com simetria $O(N)$ é possível mostrar que:

$$v^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d)$$

com N campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$ com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$ isotrópicos

E os valores previstos concordam bem com experimentos ($d = 3$):

N	1	2	3
ν_{TEOR}	0,6	0,63	0,65
ν_{EXP}	0,64	0,67	0,71

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta ideia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

O expoente ν abaixo é o que definimos. Os outros são definidos no cap 13 do Peskin (que de onde vem esta tabela):

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
<i>N = 1 Systems:</i>					
γ	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7)	binary liquid
				1.22 (3)	liquid-gas
				1.24 (2)	β -brass
ν	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5)	binary liquid
				0.65 (2)	β -brass
α	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5)	binary liquid
				0.12 (2)	liquid-gas
β	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5)	binary liquid
				0.34 (1)	liquid-gas
η	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7)	binary liquid
				0.04 (2)	β -brass
<i>N = 2 Systems:</i>					
γ	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
ν	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid ^4He
α	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid ^4He
<i>N = 3 Systems:</i>					
γ	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3)	EuO, EuS
				1.33 (3)	Ni
				1.40 (3)	RbMnF ₃
ν	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2)	EuO, EuS
				0.724 (8)	RbMnF ₃
α	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
β	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2)	EuO, EuS
				0.348 (5)	Ni
				0.316 (8)	RbMnF ₃
η	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		

Teorias de Gauge Não-Abelianas

Gostaríamos agora de explorar teorias com simetrias internas (simetrias sob transformações que agem diretamente nos campos, e não no espaço-tempo). Alguns exemplos bem conhecidos de teorias deste tipo são:

Física Nuclear:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}_A \xrightarrow[\text{global}]{SU(2)} e^{i \alpha_a \frac{T_{AB}^a}{2}} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}_B$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}_B \xrightarrow[\text{global}]{SU(2)} e^{i \alpha_a T_{BC}^a} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}_C$$

$A, B = 1, 2 \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$

QCD:

$$q = \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix}_A \xrightarrow[\text{local}]{SU(3)} e^{i \alpha_a(x) t_{AB}^a} \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix}_B$$

$$A_N^a \xrightarrow[\text{local}]{SU(3)} A_N^a + \frac{1}{g} d_{\mu\nu} \alpha^a(x) + f^{abc} A_N^b \alpha^c(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$A, B = 1, 2, 3 \quad a = 1, \dots, 8$

Nosso objetivo é entender essas transformações e quantizar estas teorias, especialmente no caso local quando, de forma análoga ao que ocorre na QED, a teoria só é invariante se existir (além dos eventuais campos escalares e espinoriais) um bóson de Gauge. A novidade aqui é que, diferentemente da simetria da QED, que era só sob uma mudança de fase, aqui teremos **simetrias sob transformações que não comutam entre si** e, conseqüentemente, teremos que lidar com grupos não-Abelianos.

Álgebras de Lie (uma curta introdução)

(Peskin 14 and 15.4; Schwartz 25.1; Cheng & Li 4.1-4.3)

Comecemos com uma curta introdução sobre os aspectos matemáticos dos grupos que estamos interessados. A primeira coisa a notar é que se tratam de grupos contínuos, com infinitos elementos parametrizados por um ou mais parâmetros:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in G \quad \text{Grupo "G"}$$

parâmetros reais que especificam o elemento
elemento do grupo

EX. $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in SU(2)$
 $g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in SO(3)$ (rotações em 3D são especificadas por 3 ângulos)

Vamos também nos limitar aos grupos em que essa parametrização é bem comportada (contínua, diferenciável) e todos os elementos podem ser levados continuamente na identidade. Estes grupos são chamados de **Grupos de Lie**. Isso quer dizer que podemos escrever transformações infinitesimais como:

$$g(\alpha) \equiv 1 + i \alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (\text{eq. 182.1}) \quad g(0) = 1$$

geradores do Grupo

A vantagem disto é que, como qualquer elemento pode ser obtido a partir de aplicações repetidas do elemento infinitesimal, conhecer a álgebra dos geradores especifica todas as propriedades do grupo para transformações pequenas (grupos que tem a mesma álgebra, pode diferir para transformações grandes). Além disso, apesar do grupo ter infinitos elementos, os grupos que nos interessam têm um número finito de geradores (**grupos compactos**)

Como qualquer transformação infinitesimal do grupo deve ser gerada pelos geradores, o produto de dois geradores deve ser uma combinação linear de geradores:

$$T^a T^b = f^c T^c \quad \neq \quad T^b T^a = f^c T^c \quad (\text{soma implícita sobre índices repetidos})$$

(em geral)

definimos então a **Álgebra de Lie** do grupo:

$$[T^a, T^b] \equiv i f^{abc} T^c \quad (\text{eq. 183.1})$$

Constantes de estrutura

EX: $SU(2)$ $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i \epsilon^{abc} \sigma^c \Rightarrow f^{abc} = \epsilon^{abc}$$

A partir de relação cíclica para comutadores: $[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0$

e 183.1, podemos mostrar a **Identidade de Jacobi**:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (\text{eq. 183.2})$$

Estamos interessados em transformações que agem em um número finito de campos, "rodando" estes campos no espaço interno definido por eles de forma unitária (de forma a manter normalizações):

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} / U^\dagger U = 1 \quad (182.1)$$

$$T^{a\dagger} = T^a \quad (\text{eq. 183.3})$$

$$g(\{\alpha\}) = e^{i\alpha_a T^a}$$

Se os geradores de uma álgebra (**ñ-abeliana**) não podem ser divididos em conjuntos menores (tal que os geradores de um conjunto comutam com todos de outro) dizemos que é uma **Álgebra Simples**. O jeito mais óbvio pelo qual isto pode ocorrer é se tivermos um gerador que comute com todos os outros. Este gerador forma um subgrupo composto só pelas transformações geradas por ele, que é abeliano e conhecido nosso:

U(1): $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ (tem a estrutura de mudanças de fase)

Uma álgebra que possa ser dividida em sub-álgebras (também ñ-abelianas e simples), mas não contenha nenhum fator abeliano U(1) é chamada de **Álgebra Semi-Simples**, e são dadas pelo soma direta de álgebras simples (lembrando que ñ-abeliano está embutido na definição de "simples"). As álgebras semi-simples nos são interessantes pois produzem geradores hermitianos (em representações finitas) e portanto transformações unitárias. Construiremos teorias baseadas em simetrias geradas a partir de álgebras semi-simples mais fatores U(1). O modelo padrão é dado por $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ (ou, equivalentemente $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$)

Existe uma classificação bem conhecida que engloba todas as álgebras finitas (grupo compacto) e simples:

Compacto e Simples

- $SU(N), SO(N), Sp(N)$ } grupos clássicos (cada um é uma família de infinitos grupos, conforme muda N)
- G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 } grupos excepcionais

Focaremos nossos esforços no grupos clássicos, especialmente os grupos SU(N), pois são eles que apareceram no MP (há propostas de teorias de unificação usando grupos excepcionais e/ou SO(N), no entanto).

SU(N): Grupos Especiais Unitários

Grupo de todas as transformações unitárias N x N:

$$\psi_A \rightarrow U_{AB} \psi_B \quad \phi_A \rightarrow U_{AB} \phi_B \quad / \quad \psi_A^* \phi_A \rightarrow \psi_A^* \phi_A$$

A, B = 1... N

que satisfazem $\det(U) = 1$. Escrevendo:

$$U = e^{iH} \quad (H^\dagger = H) \Rightarrow \det(U) = \det(e^{iH}) = e^{i \text{Tr}[H]} \quad \left. \begin{matrix} \det(U) = 1 \\ \text{Tr}[H] = 0 \end{matrix} \right\}$$

(https://planetmath.org/prooffhatdetaeoperatorametra)

(note que esta exigência para o determinante exclui uma fase U(1))

$$H = \alpha_a T^a \quad \left. \begin{matrix} \text{Tr}[H] = 0 \\ \forall \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Tr}[T^a] = 0}$$

Só existem N^2-1 matrizes independentes que sejam hermitianas e de traço nulo (exercício), por isso a **dimensão do grupo SU(N) é N^2-1** .

Ex: SU(2) → 3 matrizes (de Pauli)

SU(3) → 8 matrizes (de Gell-Mann https://en.wikipedia.org/wiki/Gell-Mann_matrices)

SO(N) (Grupo das rotações N dimensões espaciais) e **Sp(N)** (grupo simplético): ver definições no Peskin, pg 497

↳ $\frac{N(N-1)}{2}$ GERADORES

↳ $\frac{N(N+1)}{2}$ GERADORES (N É PAR)

Representações

Estes grupos admitem representações de dimensão finita que podemos escrever como matrizes (não confunda a dimensão da representação - o tamanho das matrizes - com a dimensão do grupo, que é o número de geradores) concretizando a operação do grupo como um produto matricial:

$$\begin{matrix} a, b, c \in G \\ a \cdot b = c \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} M(a), M(b), M(c) \in \mathcal{R}(G) \\ M(a) \cdot M(b) = M(c) \end{matrix}$$

estamos especialmente interessados em definir a representação da álgebra:

$T^a \Rightarrow t^a$ matrizes $d \times d$, uma para cada gerador, onde $d(r)$ é a **dimensão da representação**

Dizemos que uma representação é **reduzível** se pudermos escolher uma base em que todos os geradores são bloco-diagonais. Se esta base for tal que é impossível reduzir ainda mais o tamanho dos blocos, conseguimos escrever a representação em termos de uma **soma direta de rep. irredutíveis**:

$$M(a) = \begin{pmatrix} M_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(a) & 0 \\ 0 & 0 & M_3(a) \end{pmatrix} = M_1(a) \oplus M_2(a) \oplus M_3(a)$$

Nós vamos denotar os geradores do grupo na representação irredutível r , por: t_r^a

Podemos escolher uma normalização: $\text{Tr}[t_r^a t_r^b] \equiv D^{ab} > 0$

hermitianos

Mais especificamente, escolheremos ter uma relação de ortogonalidade $D^{ab} \sim \delta^{ab}$

$\text{Tr}[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab}$

(eq. 185.1)
 $C(r) > 0$

Podemos escrever a álgebra em termos da representação dos geradores:

$$[t_r^a, t_r^b] = i f^{abc} t_r^c \quad \Rightarrow \quad f^{abc} = \frac{-i}{C(r)} \text{Tr} [[t_r^a, t_r^b] t_r^c]$$

f é totalmente antissimétrico

(eq. 185.2)

Para cada representação irredutível r , podemos ter uma representação conjugada \bar{r}

$$\begin{aligned} r: \phi &\rightarrow (1 + i\alpha^a t_r^a) \phi \\ \bar{r}: \phi^* &\rightarrow (1 - i\alpha^a (t_r^a)^*) \phi^* \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r: \phi &\rightarrow (1 + i\alpha^a t_r^a) \phi \\ \bar{r}: \phi^* &\rightarrow (1 - i\alpha^a (t_r^a)^*) \phi^* \end{aligned}} \right\} t_r^a \equiv -(t_r^a)^* = -(t_r^a)^T$$

HERMIT.

Podemos construir invariantes combinando campos nas representações r e \bar{r} : $\phi^* \phi$

Se houver uma transformação unitária U tal que $t_{\bar{r}}^a = U t_r^a U^\dagger$ aí r e \bar{r} são equivalentes, e neste caso dizemos que r é uma representação real.

A menor representação irredutível da álgebra é chamada de representação fundamental, no caso de $SU(N)$ esta é também a representação que define o grupo e os geradores são matrizes $N \times N$ (hermitianas e sem traço) que agem em vetores N -dimensionais complexos. Esta representação é complexa e, portanto, há uma representação conjugada. Esta é a representação mais usada, então em geral não usamos o subscrito r :

$t^a \equiv t_{\text{FUND}}^a$

$SU(N): d(\text{FUND}) = N$

A maioria das partículas no MP se transformam na representação fundamental de 1 (ou mais) grupos, e suas antipartículas na fundamental conjugada. Ex:

$$u_R^A = \begin{pmatrix} u_R^R \\ u_R^G \\ u_R^B \end{pmatrix} \quad L_{1L}^I = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad H^I = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad Q_{uL}^{IA} = \begin{pmatrix} u_L^A \\ d_L^A \end{pmatrix}$$

$A = 1, 2, 3$ fund de $SU(3)$

$I = 1, 2$ fund de $SU(2)_L$

Uma outra representação bastante importante é a **representação adjunta**, na qual os geradores são definidos usando a própria constante de estrutura:

rep. adjunta $\boxed{(t_G^b)_{ac} = i f^{abc}} \quad (\text{eq. 186.1})$

de fato estas matrizes satisfazem a álgebra do grupo:

$\boxed{([t_G^b, t_G^c])_{ae} = i f^{bcd} (t_G^d)_{ae}}$ (eq. 186.2) porque isso é só a identidade de Jacobi (183.2) novamente

Esta representação é real (f é real se os geradores são hermitianos):

$$-(t_G^a)^* = -(-i f^{a bc}) = t_G^a$$

Em SU(N): $\begin{cases} a, b, c = 1, \dots, N^2-1 \\ \text{Matrizes } (N^2-1) \times (N^2-1) \end{cases}$

E a dimensão da rep. adjunta é igual a dimensão do grupo

$\boxed{SU(N): d(G) = N^2 - 1}$

Veremos que **os bósons de Gauge se transformam na rep. adjunta**.

Finalmente, gostaríamos de definir o **operador de Casimir**: $\boxed{T^2 \equiv t^a t^a}$ (eq. 186.3)

que tem a propriedade de comutar com todos os geradores: $[T^2, t^a] = 0$

e portanto, em uma dada representação r, pode ser escrito como proporcional a identidade:

$\boxed{t_r^a t_r^a \equiv C_2(r) \hat{1}}$ Quadratic Casimir Operator (eq. 186.4)

Na adjunta isso toma a forma: $(t^c)_{ad} (t^c)_{db} = i f^{acd} f^{dcb} = f^{acd} f^{bcd} \equiv C_2(G) \delta^{ab}$
 (185.1)

Note que: $(\text{Tr}[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab}) \times \delta^{ba} \Rightarrow \text{Tr}[t_r^a t_r^a] = C(r) d(G) \Rightarrow \boxed{d(r) C_2(r) = d(G) C(r)}$ (eq. 186.5)
número de geradores = d(G) $C_2(r) \text{Tr}[\hat{1}]$

Um exemplo de operador de Casimir bastante conhecido é o spin total J^2 , que comuta com os três componentes de (J_x, J_y, J_z) (e é um exemplo do SU(2)).

Para SU(N) temos (exercício - veja Peskin pgs 501-502):

$C(\text{FUND}) = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{C_2(\text{FUND}) = \frac{N^2 - 1}{2}}$ (eq. 186.6)

$\boxed{C_2(G) = C(G) = N}$ (eq. 186.7)

Teorias de Yang-Mills

(Cheng & Li 8.1; Peskin 15.2- 15.3)

Teorias de Yang-Mills são teorias construídas com algum grupo de **simetria local e não-abeliana**. Tipicamente temos um campo de matéria (escalar ou espinorial) se transformando em uma das representações do grupo de simetria e, para que a Lagrangiana seja invariante, temos também bósons de Gauge. É possível também construir uma teoria somente com os **bósons de Gauge** porque, como veremos, estes **têm auto-interações**. A terminologia na literatura não é consistente, mas teorias onde só estão presentes os bósons de spin 1 são por vezes chamados de teorias de **Puro Yang-Mills**.

Em analogia com o caso abeliano, temos em mente um sistema em que os campos escalares e fermiônicos se transformam como:

$$\Psi(x) \rightarrow \underbrace{\text{EXP}\left(i \alpha_a(x) t^a\right)}_{V(x)} \Psi(x) \qquad \phi(x) \rightarrow \text{EXP}\left(i \alpha_a(x) t^a\right) \phi(x)$$

geradores do grupo em alguma representação (vamos suprimir este índice)

$$\begin{aligned} V^\dagger &= V^{-1} \\ t^\dagger &= t \end{aligned}$$

Na forma infinitesimal:

$$V(x) = e^{i \alpha_a t^a} = 1 + i \alpha^a(x) t^a + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

(eq. 187.1)

Assim como no caso abeliano queremos definir uma derivada covariante tal que:

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow (D_\mu \Psi)' = V(x) D_\mu \Psi(x)$$

definiremos esta derivada: $D_\mu \equiv \partial_\mu - i g A_\mu^a t^a$ (introduzimos os campos de Gauge, note que **temos um campo para cada gerador do grupo**)

(eq. 187.2)

o que implica que: $(\partial_\mu - i g A_\mu^a t^a) \underbrace{\Psi'(x)}_{V(x)\Psi(x)} = V(x) (\partial_\mu - i g A_\mu^a t^a) \Psi(x)$

$$\partial_\mu V(x) \Psi(x) + V(x) \partial_\mu \Psi(x) - i g A_\mu^a t^a V(x) \Psi(x) = V(x) \partial_\mu \Psi(x) - i g \underbrace{V(x) A_\mu^a t^a}_{\text{não comutam!}} \Psi(x)$$

$$\underbrace{[\partial_\mu V(x) - i g A_\mu^a t^a V(x)]}_{\text{}} \Psi(x) = \underbrace{-i g V(x) A_\mu^a t^a}_{\text{}} \Psi(x)$$

$$\left(A_\mu^a t^a V(x) = V(x) A_\mu^a t^a - \frac{i}{g} \partial_\mu V(x) \right) V^\dagger(x)$$

$\partial_\mu (V^{-1} V) = 0$
 $(\partial_\mu V) V^\dagger = -V (\partial_\mu V^\dagger)$

$$A_\mu^a t^a = V(x) \left[A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] V^\dagger(x)$$

(eq. 187.3)

e define a lei de transformação para o campo de Gauge não-abeliano.

É instrutivo escrever a versão infinitesimal de 187.3:

$$A_\nu^a t^a \rightarrow A_\nu^a t^a = (1 + i\alpha^b t^b) \left[A_\nu^a t^a + \frac{i}{g} d_\nu \right] (1 - i\alpha^d t^d) + \mathcal{O}(\alpha^2) =$$

$$= A_\nu^a t^a + \frac{1}{g} (d_\nu \alpha^a) t^a - i \underbrace{A_\nu^a t^a \alpha^b t^b + i \alpha^b t^b A_\nu^a t^a}_{-i [A_\nu^a t^a, \alpha^b t^b]} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$-i [A_\nu^a t^a, \alpha^b t^b] = -i A_\nu^a \alpha^b (i f^{abc} t^c)$
 $f^{abc} A_\nu^b \alpha^c t^a$

$$A_\nu^a t^a \rightarrow A_\nu^a t^a + \frac{1}{g} (d_\nu \alpha^a) t^a + f^{abc} A_\nu^b \alpha^c t^a \tag{eq. 188.1}$$

$$A_\nu^a \rightarrow A_\nu^a + \frac{1}{g} (d_\nu \alpha^a) + f^{abc} A_\nu^b \alpha^c \tag{eq. 188.2}$$

este é o novo pedaço (em relação à teoria abeliana) e deixa claro que o campo de Gauge está transformando na rep. adjunta:

$$f^{abc} A_\nu^b \alpha^c = -\alpha^c f^{acb} A_\nu^b = i \alpha^c (t_G^c)_{ab} A_\nu^b$$

$$A_\nu^a \rightarrow \left(\delta_{ab} + i \alpha^c (t_G^c)_{ab} \right) A_\nu^b + \frac{1}{g} d_\nu \alpha^a$$

O que significa que agora os próprios campos de Gauge carregam "cargas" da interação e podem interagir entre si (como veremos logo). A equação 187.3 mostra que é útil definir um versão matricial do campo de Gauge:

$$A_\nu^M \equiv A_\nu^a t^a \tag{eq. 188.3} \quad A_\nu^M \rightarrow V(x) \left[A_\nu^M + \frac{i}{g} d_\nu \right] V^\dagger(x)$$

Ex: $SU(2): \begin{cases} a=1, \dots, 3 \\ t^a = \frac{\sigma^a}{2} \end{cases}$

$SU(3): \begin{cases} a=1, \dots, 8 \\ t^a = \text{Gell-Mann Matrices} \end{cases}$

$$A_\nu^a = (A_\nu^1, A_\nu^2, A_\nu^3)$$

$$G_\nu^a = (G_\nu^1, \dots, G_\nu^8)$$

$$A_\nu^M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\nu^3 & A_\nu^1 - i A_\nu^2 \\ A_\nu^1 + i A_\nu^2 & -A_\nu^3 \end{pmatrix}$$

$$G^M = \begin{pmatrix} G^3 + \frac{G^8}{\sqrt{3}} & G^1 - i G^2 & G^4 - i G^5 \\ G^1 + i G^2 & -G^3 + \frac{G^8}{\sqrt{3}} & G^6 - i G^7 \\ G^4 + i G^5 & G^6 + i G^7 & -\frac{2G^8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Para obter uma teoria completa para estes bósons, precisamos de um equivalente do $F_{\mu\nu}$. Para tanto voltemos no abeliano para notar que:

$$D_\nu \Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\nu \Psi(x) \Rightarrow D_\nu [D_\nu \Psi(x)] \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\nu D_\nu \Psi(x)$$

Logo:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} [D_\mu, D_\nu] \psi(x) \quad (\text{eq. 189.1})$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu] \psi(x) &= \underbrace{[\partial_\mu, \partial_\nu]}_{=0} \psi(x) + i e [A_\mu, \partial_\nu] \psi(x) + i e [\partial_\mu, A_\nu] \psi(x) - e^2 [A_\mu, A_\nu] \psi(x) \\
 &= i e A_\nu \partial_\mu \psi - i e \partial_\nu [A_\mu \psi] + i e \partial_\mu [A_\nu \psi] - i e A_\nu \partial_\mu \psi \\
 &= -i e \psi \partial_\nu A_\mu + i e \psi \partial_\mu A_\nu
 \end{aligned}$$

↙ CANCELAMENTO ↘ ↙ CANCELAMENTO ↘

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = i e F_{\mu\nu} \psi(x) \quad (\text{eq. 189.2})$$

(189.1)

$$F_{\mu\nu} \psi(x) \rightarrow \underbrace{F_{\mu\nu} e^{i\alpha(x)}}_{\text{Invariante}} \psi(x)$$

↳ Transformação usual de ψ

Podemos usar a mesma ideia agora e obter um objeto com segundas derivadas no campo de Gauge (e transformações bem definidas sobre o grupo local) usando o comutador das derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x)$$

O comutador, por sua vez:

este termo era zero na teoria Abelianas

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu] \psi(x) &= \underbrace{[\partial_\mu, \partial_\nu]}_{=0} \psi(x) - i g [A_\mu^M, \partial_\nu] \psi(x) - i g [\partial_\mu, A_\nu^M] \psi(x) - g^2 [A_\mu^M, A_\nu^M] \psi(x) \\
 &= i g (\partial_\nu A_\mu^M) \psi - i g (\partial_\mu A_\nu^M) \psi - g^2 [A_\mu^M, A_\nu^M] \psi \\
 &= -i g \left\{ \underbrace{\partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M - i g [A_\mu^M, A_\nu^M]}_{F_{\mu\nu}^M = F_{\mu\nu}^a t^a} \right\} \psi(x) = -i g F_{\mu\nu}^M \psi(x) \quad (\text{eq. 189.3})
 \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu}^a t^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a t^a - \partial_\nu A_\mu^a t^a - i g [A_\mu^a t^a, A_\nu^b t^b]$$

$-i g A_\mu^a A_\nu^b (i f^{abc} t^c) = g A_\mu^b A_\nu^c f^{abc} t^a$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{eq. 189.3})$$

A transformação do tensor vem de:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x)$$

$$-ig F_{\mu\nu}^M \psi(x) \rightarrow -ig V(x) F_{\mu\nu}^M V^\dagger(x) V(x) \psi(x) = -ig V(x) F_{\mu\nu}^M \psi(x) \checkmark$$

$$F_{\mu\nu}^a t^a \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}^a t^a V^\dagger(x)$$

(eq. 190.1)

versão infinitesimal:

$$F_{\mu\nu}^a t^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a t^a + [i\alpha^a t^a, F_{\mu\nu}^b t^b]$$

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c$$

Note que o tensor não é mais invariante por transformações de gauge. Não é difícil, no entanto, construir invariantes:

$$\text{Tr} [F_{\mu\nu}^a t^a F_{\mu\nu}^b t^b] \rightarrow \text{Tr} [V(x) F_{\mu\nu}^a t^a V^\dagger(x) V(x) F_{\mu\nu}^b t^b V^\dagger(x)]$$

além disso:

$$\text{Tr} [F_{\mu\nu}^a t^a F_{\mu\nu}^b t^b] = F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \text{Tr} [t^a t^b] = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

$\frac{1}{2} \delta^{ab}$ (fundamental de SU(N))

De forma que o termo apropriado para a Lagrangiana pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_{\text{GAUGE}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu}^M F^{\mu\nu M}] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

(eq. 189.3)

Note que aqui temos termos cúbicos e quárticos nos campos de gauge. **Eles interagem entre si!**

E uma teoria com um único férmion se transformando por esta simetria ficaria:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

Há apenas um acoplamento nesta teoria (g), ele controla a interação entre gauges e com o férmion

(eq. 190.2)

A equação de movimento clássica é:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A_\mu^b F_{\nu\lambda}^c = -g j_\mu^a$$

(eq. 190.3)

onde aparece a corrente conservada por esta simetria:

$$j_\mu^a \equiv \bar{\Psi} \gamma_\mu t^a \Psi$$

(eq. 190.4)

(tudo clássico até aqui)

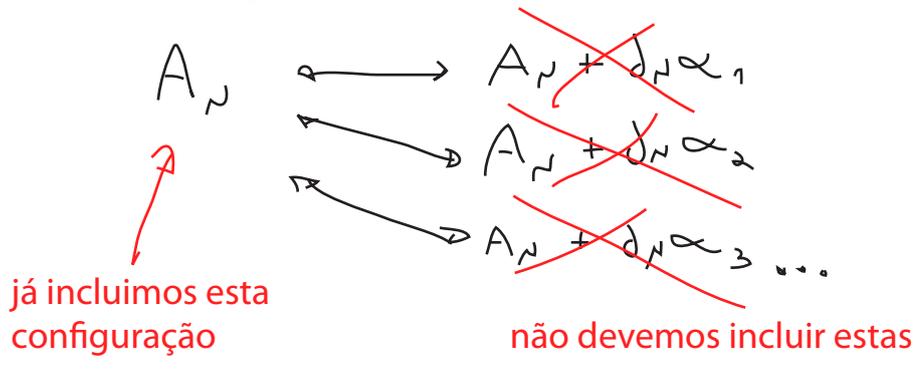
Quantização de Teorias não-Abelianas

(Peskin 16.1-16.2, Ryder 7.1-7.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano. Usaremos o método de Faddeev-Popov, seguindo da forma mais próxima possível o que fizemos para o campo na teoria Abeliana (se você não lembra o que foi feito lá, deve no material de campos I e olhar: Peskin 9.4 & https://professores.ift.unesp.br/ricardo.matheus/files/courses/2020tqc1/lecturenotes_QFTI_2020.pdf#page=167 aqui focaremos nos que muda para o caso não-abeliano). Para a teoria de Yang-Mills pura, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

Lembrando rapidamente do problema que enfrentamos ao quantizar teorias de Gauge, a sua raiz está na própria invariância de Gauge, que introduz uma redundância problemática. Isso fica claro quando pensamos em termos da integral de trajetória. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ , **somamos inclusive aquelas equivalentes** (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



O resultado disso era ter um operador na parte quadrática com uma infinidade de autovalores zero, e portanto singular. Por isso não conseguíamos obter o propagador.

O mesmo ocorre no caso não-abeliano, só que agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A_\nu^M = A_\nu^a t^a \xrightarrow{\chi} A_\nu^{M\chi} \equiv (A_\nu^a)^M t^a = e^{i\chi^a t^a} \left[A_\nu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\nu \chi \right] e^{-i\chi^a t^a}$$

↳ parâmetro da transformação de Gauge

O que faremos para evitar esta múltipla contagem é o mesmo que fizemos no caso abeliano, introduzindo a fixação de Gauge por meio da identidade:

$$1 = \int \mathcal{D}\chi \delta(G(A_\nu^{M\chi})) \text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\nu^{M\chi})}{\delta \chi} \right]$$

↳ Vínculo: $G(A_\nu^{M\chi}) = 0$

esta identidade está provada no Ryder pgs 246-248, e nas minhas notas de 2020 pg 169 lembrando que lá:

$$\text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\nu^{M\chi})}{\delta \chi} \right] = \text{DET} [-\partial^2]$$
 (eq. 191.1)

A principal novidade está realmente neste determinante. No caso abeliano a função G era:

$$-\partial^\nu A_\nu^\chi + C = -\partial^2 \chi - \partial_\nu A^\nu + C \Rightarrow \frac{\delta G}{\delta \chi} = -\partial^2 \quad \text{Independente de A e de } \chi !!!$$

A transformação infinitesimal do campo (eq. 188.2):

$$A_\nu^a \rightarrow A_\nu^{a\chi} = A_\nu^a + \frac{1}{g} (\partial_\nu \chi^a) + f^{abc} A_\nu^b \chi^c$$

nos mostra que agora uma condição do tipo $G(A_\nu^{a\chi}) = 0$

vai resultar em um $\frac{\delta G}{\delta \chi}$ que depende de A_ν^a uma vez que $A_\nu^{a\chi}$ tem um termo cruzado entre χ e A

Podemos, no entanto, assumir que G é linear em χ , e aí o determinante será invariante de Gauge:

$$\text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\nu^{a\chi})}{\delta \chi} \right] = \text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\nu^a)}{\delta \chi} \right] \equiv \Delta_G[A_\nu^a] = \Delta_G[A_\nu^{a\chi}]$$

↑ não dep. de χ (invariante de gauge) (eq. 192.1)

e podemos tirar o determinante da integral em 191.1:

$$\Delta_G^{-1}[A_\nu^a] = \int \mathcal{D}\chi \delta(G(A_\nu^{a\chi}))$$

(eq. 192.2)

Inserindo a identidade 191.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\nu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \int \mathcal{D}\chi \delta(G(A_\nu^{a\chi})) \Delta_G[A_\nu^{a\chi}] = \\ &= \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A_\nu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \delta(G(A_\nu^{a\chi})) \Delta_G[A_\nu^{a\chi}] \end{aligned}$$

↪ $\mathcal{L}_{YM}(A_\nu^a) = \mathcal{L}_{YM}(A_\nu^{a\chi}) \equiv \mathcal{L}_{YM}^{\chi}$ (invariante de gauge)

Podemos então fazer uma mudança de variáveis em A , que é a transformação de gauge que leva

$$A_\nu^{a\chi} \rightarrow A_\nu^a$$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor A^a , então:

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A_\nu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \delta(G(A_\nu^a)) \Delta_G[A_\nu^a]$$

↪ Nada na integral em A depende de χ , isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano

$\Delta_G [A_\mu]$ também independe de A e **pode ser tirado da integral e ignorado** (outro fator multiplicativo).

Agora temos:

$$G(A_\mu^a) = \int d^N A_\mu^a(x) - w^a(x) \xrightarrow{\tilde{N}\text{-ABEL}} G(A_\mu^a \chi) = \int d^N \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\nu \chi^\mu + f^{abc} A_\mu^b \chi^c \right) - w^a(x)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \chi^a} = \frac{\delta}{\delta \chi^a} \left[\frac{1}{g} \int d^N \partial_\nu \chi^\mu + f^{abc} \int d^N A_\mu^b \chi^c \right] = \frac{1}{g} \int d^N D_\nu^{ad}$$

$$(A_\mu^a \chi)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\nu \chi^\mu + f^{abc} A_\mu^b \chi^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} \left(\int d^N \partial_\nu + g f^{abc} A_\mu^b \right) \chi^c \equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\nu^{ac} \chi^c$$

$\frac{\delta G(A_\mu^a)}{\delta \chi^b}$ é uma matriz quadrada (índices a e b) de dimensão N^2-1 (a,b são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em SU(N))

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$\text{DET } M = \int D\bar{c} Dc e^{-\int d^4x \bar{c} \cdot M \cdot c}$$

matriz $N^2-1 \times N^2-1$

campo de números de Grassmann. Multipletto com N^2-1 componentes, se transformando na rep. adjunta de SU(N)

Finalmente:

$$\Delta_G [A_\mu^a] = \text{DET} \left[\frac{\delta G(A_\mu^a \chi)}{\delta \chi} \right] = \int D\bar{c} Dc \exp \left[i \int d^4x \bar{c}_a (-\int d^N D_\nu^{ac}) c_c \right]$$

fatores g e -i incluídos na definição de c

- c { Adjunta de SU(N)
- Anti-comutam (estatística de férmions)
- Escalares de Lorentz (spin 0)

Relação spin-estatística errada!

Fantasma (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\Delta_{FPG} \equiv \bar{c}_a (-\int d^N D_\nu^{ac}) c_c = \bar{c}_a \left(-\int d^N \partial_\nu - g f^{abc} \int d^N A_\mu^b \right) c_c$$

$$\mathcal{L}_{\text{FPG}} = - \underbrace{\bar{c}_a \square c_a}_{\text{Termo cinético}} - g f^{abc} \bar{c}_a \partial^\mu (A_\mu^b c_c) \quad (\text{eq. 194.1})$$

Termo cinético: $\partial^\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a$

Interação Ghost-Gauge

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

$$g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}_a) A_\mu^b c_c$$

$$\text{Diagrama } a \text{---} p \text{---} b \equiv \frac{i \delta^{ab}}{p^2} \quad (\text{eq. 194.2})$$

(Espaço dos momentos, Mink)

$$\text{Diagrama } a \text{---} p \text{---} b \text{---} c \equiv -g f^{abc} p^\mu \quad (\text{eq. 194.3})$$

(Espaço dos momentos, Mink)

Acoplamento de gauge

Com isso em mente, temos:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{FPG}}} \underbrace{\delta(G(A_\mu^a))}_{\text{Gauge Fixing}}$$

Esta δ é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^a)) = \delta(\partial^\mu A_\mu^a - \omega)$$

Basta multiplicar Z pela identidade $N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} = 1$

Escolhido de forma a garantir a ident.

E fazer a integral em ω usando a delta:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{FPG}}} \text{EXP} \left[i \int d^4x \underbrace{\left(-\frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi} \right)}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \right]$$

Absorve as normalizações

\mathcal{L}_{GF}
(Gauge Fixing)

Podemos inclusive incluir os férmions para a Lagrangiana final:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c$$

(eq. 195.1)

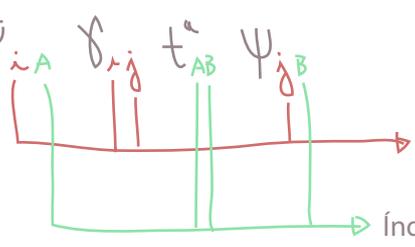
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D = \gamma^\mu (\partial_\mu - i g A_\mu^a t^a)$$

$$D_\nu^{ac} = (\delta^{ac} \partial_\nu + g f^{abc} A_\nu^b)$$

Lembrando que ainda reſtam índices escondidos nos férmions:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \gamma^\mu t^a \Psi = \bar{\Psi}_{iA} \gamma^\mu_{ij} t^a_{AB} \Psi_{jB}$$



Depende da rep. em que os ψ se transformam (esta forma é para a fundamental)

As regras de Feynman da parte fermiônica não mudam muito, basta lembrar que temos um número de férmions igual à dimensão da representação do grupo. O propagador só muda para incluir o índice da simetria interna:

$$\langle \Psi_{iA}(x) \bar{\Psi}_{jB}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k - m} \right)_{ij} \delta_{AB} e^{-ik(x-y)}$$

$$A \xrightarrow{p} B = \frac{i (\not{p} + m) \delta_{AB}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(eq. 195.2)

(Espaço dos momentos, Mink., $g_{\mu\nu} = \text{Diag}\{1, -1, -1, -1\}$)

Uma vez fixado o Gauge, podemos obter o propagador para os bósons de Gauge a partir dos termos:

$$(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})$$

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 \right] =$$

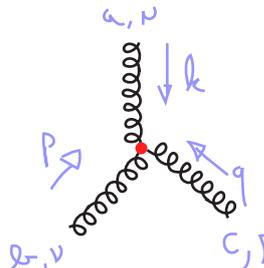
$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{a\mu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{a\nu} + \frac{1}{2\xi} A^{a\mu} (\partial_\mu \partial_\nu) A^{a\nu} \right]$$

$$= \int d^4x \frac{1}{2} A^{a\mu} \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^{a\nu} =$$

temos que inverter este operador

$$\langle P_{\mu}^{\nu} q_{\nu}^{\rho} | (d_{\alpha} A_{\beta}^{\mu}) A^{\rho\beta} A^{\gamma\mu} | k_{\alpha}^{\nu} \rangle \Rightarrow (ig) f^{\alpha\beta\gamma} (-i k_{\alpha}) g_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha\mu} g^{\nu\beta} \delta_{\mu\gamma} g^{\rho\mu} \delta_{\nu\gamma} = g f^{\alpha\beta\gamma} k^{\rho} g^{\nu\mu}$$

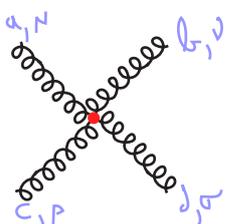
$$\langle P_{\mu}^{\nu} q_{\nu}^{\rho} | (d_{\alpha} A_{\beta}^{\mu}) A^{\rho\beta} A^{\gamma\mu} | k_{\alpha}^{\nu} \rangle \Rightarrow (ig) f^{\alpha\beta\gamma} (-i k_{\alpha}) g_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha\mu} g^{\rho\beta} \delta_{\mu\gamma} g^{\nu\alpha} \delta_{\mu\gamma} = g f^{\alpha\beta\gamma} k^{\nu} g^{\rho\mu} = -g f^{\alpha\beta\gamma} k^{\nu} g^{\rho\mu}$$



$$= g f^{\alpha\beta\gamma} [g^{\nu\mu} (k-p)^{\rho} + g^{\nu\rho} (p-q)^{\mu} + g^{\rho\mu} (q-k)^{\nu}]$$

(Mink., Momento)
(eq. 197.1)

Seguindo a mesma lógica, obtemos o acoplamento quártico (são 4! contrações, mas somente 6 delas são diferentes e se repetem 4 vezes, o que some com o fator 1/4 da Lagrangiana):



$$= -ig^2 [f^{\alpha\beta\gamma} f^{\delta\epsilon\zeta} (g^{\nu\rho} g^{\sigma\tau} - g^{\nu\sigma} g^{\rho\tau}) + f^{\alpha\beta\zeta} f^{\delta\epsilon\gamma} (g^{\nu\rho} g^{\sigma\tau} - g^{\nu\sigma} g^{\rho\tau}) + f^{\alpha\beta\delta} f^{\gamma\epsilon\zeta} (g^{\nu\rho} g^{\sigma\tau} - g^{\nu\sigma} g^{\rho\tau})]$$

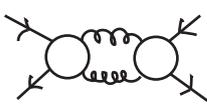
(Mink., Momento)

(eq. 197.2)

Ghosts e Unitariedade

(Peskin 16.1 e 16.3; Ryder 7.7)

Já vimos que precisamos introduzir os FP Ghosts para resolver um problema introduzido pela invariância de Gauge da Teoria, mas eles têm uma outra função, que ficará clara se calcularmos o seguinte diagrama:

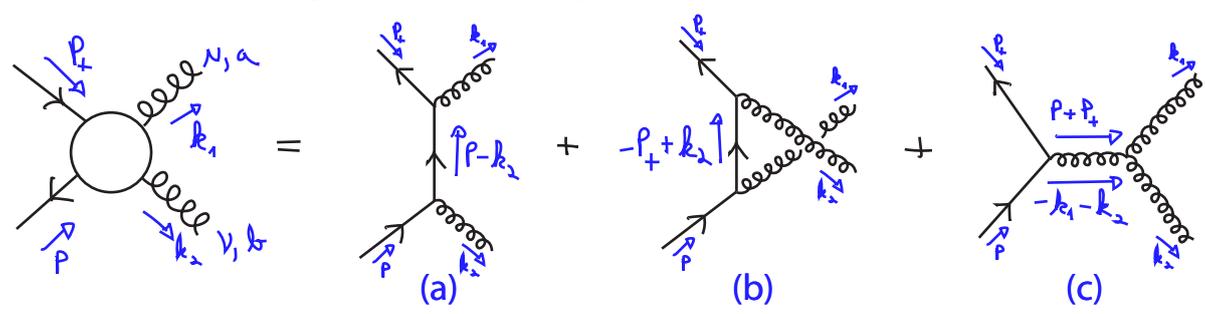


O teorema óptico nos diz que:

$$2 \text{Im} \left[\text{Diagram with two ghost loops} \right] = \int d\pi \left| \text{Diagram with one ghost loop} \right|^2$$

↑
integrals no espaço de fase dos dois bósons de Gauge

que, em LO, recebe as seguintes contribuições:



Portanto é interessante estudar os três diagramas que contribuem para esta amplitude. Os diagramas (a) e (b) somados nos dão:

$$i \mathcal{M}_{\mu\nu}^{N\lambda} \epsilon_r^*(k_1) \epsilon_s^*(k_2) = (ig)^2 \sqrt{V(P_+)} \left\{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{P} - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu t^a + \gamma^\nu t^b \frac{-i}{\not{k}_2 - \not{P} - m} \gamma^\mu t^a \right\} U(P) \epsilon_r^*(k_1) \epsilon_s^*(k_2)$$

Podemos nos perguntar se estes bósons de Gauge, que nesta amplitude são partículas externas, satisfazem identidades de Ward assim como faziam os ftons:



subtraí zero
(P-m)U(P)=0

$$i \mathcal{M}_{\mu\nu}^{N\lambda} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \sqrt{V(P_+)} \left\{ -\gamma^\mu t^a \frac{i}{-\not{P} + \not{k}_2 + m} (k_2 - (P-m)) t^a + (k_2 - P - m) t^a \frac{-i}{\not{k}_2 - \not{P} - m} \gamma^\mu t^a \right\} U(P) \epsilon_r^*(k_1)$$

$\overline{V(P_+)}(-P_+ - m) = 0$ U

$$i \mathcal{M}_{\mu\nu}^{N\lambda} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \sqrt{V(P_+)} \left\{ -i \gamma^\mu t^a t^b + i t^b \gamma^\mu t^a \right\} U(P) \epsilon_r^*(k_1)$$

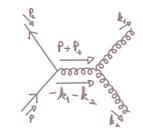
$$-i \gamma^\mu [t^a, t^b] = -i \gamma^\mu (i f^{abc} t^c) \neq 0$$

O que seria zero no caso abeliano, mas não é zero para o caso não-abeliano.

$$i \mathcal{M}_{\mu\nu}^{N\lambda} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = -g^2 \sqrt{V(P_+)} \gamma^\mu t^c U(P) \epsilon_r^*(k_1) f^{abc}$$

(a) + (b)
(eq. 198.1)

Isto representa um problema, pois nos diz que a probabilidade de produzir bósons de Gauge com polarizações longitudinais é diferente de zero (uma das coisas que a identidade de Ward fazia era impedir isso) e argumentos simples de relatividade nos mostram que bósons vetoriais sem massa só tem duas polarizações físicas (as transversais). Vejamos a contribuição do diagrama (c):



$$i M_c^{NV} \epsilon_r^*(k_1) \epsilon_s^*(k_2) = i \gamma \bar{v}(P) \gamma_p t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_{\mu}^*(k_1) \epsilon_{\nu}^*(k_2) \times \boxed{k_3 \equiv -k_1 - k_2}$$

$$\times g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (k_2 - k_1)^{\rho} + g^{\nu\rho} (k_3 - k_1)^{\mu} + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^{\nu} \right]$$

$$i M_c^{NV} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = i \gamma \bar{v}(P) \gamma_p t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_{\mu}^*(k_1)$$

$$\times g f^{abc} \left[k_2^{\mu} (k_2 - k_1)^{\rho} + k_3^{\mu} (k_3 - k_1)^{\rho} + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^{\nu} \cdot k_{2\nu} \right]$$

$$[] = \left[\underbrace{(-k_1 - k_3)^{\mu} (-k_1 - k_3 - k_1)^{\rho}}_{+ k_1^{\mu} (k_1 + k_3 + k_1)^{\rho}} + \underbrace{(-k_1 - k_3)^{\mu} (k_3 + k_1 + k_3)^{\rho}}_{- k_1^{\mu} (k_1 + k_3)^{\rho}} + \underbrace{g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^{\nu} \cdot (-k_1 - k_3)_{\nu}}_{-k_1^2 - k_1 \cdot k_3 + k_1 k_3 + k_3^2} \right] =$$

$$+ k_1^{\mu} (k_1 + k_3 + k_1)^{\rho} \quad - k_1^{\mu} (k_1 + k_3)^{\rho}$$

$$+ k_3^{\mu} (k_1 + k_3 + k_1)^{\rho} \quad - k_3^{\mu} (k_1 + k_3)^{\rho}$$

$$\quad \quad \quad - k_3^{\mu} (k_1 + k_3)^{\rho}$$

$$i M_c^{NV} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = i \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_p t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_{\mu}^*(k_1) f^{abc} \left[k_1^{\mu} k_1^{\rho} - k_3^{\mu} k_3^{\rho} - g^{\rho\mu} (k_1^2 - k_3^2) \right]$$

(eq. 199.1)

Se dermos uma "acoxambada" assumindo que o bóson com momento k_1 tem polarização transversa:

(1) $k_{c1}^{\mu} \epsilon_{\mu}^*(k_1) = k_{c1}^{\mu} \epsilon_{\mu}^{*T}(k_1) = 0$ (o que não é justificável por enquanto)

E usamos:

(2) $k_1^2 = 0$ (on-shell)

$$\not{P} u(P) = m u(P)$$

$$\bar{v}(P_+) \not{P}_+ = -\bar{v}(P_+) m$$

(3) $\bar{v}(P_+) \gamma_p k_3^{\rho} u(P) = \bar{v}(P_+) (\not{P} + \not{P}_+) u(P) = \bar{v}(P_+) (m - m) u(P) = 0$ (eqs. de mov.)

$k_3 = P + P_+$

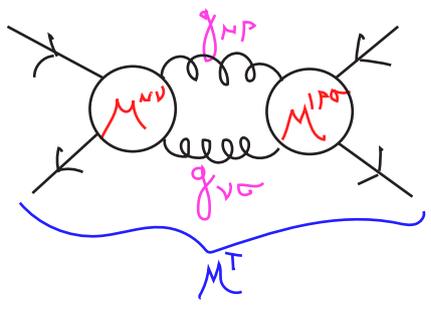
Obtemos:

$$i M_c^{NV} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = i \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_p t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_{\mu}^*(k_1) f^{abc} \left[\cancel{k_1^{\mu} k_1^{\rho}}_{(1) \circ} - \cancel{k_3^{\mu} k_3^{\rho}}_{(3) \circ} + g^{\rho\mu} (\cancel{k_1^2} + \cancel{k_3^2})_{(4) \circ} \right] =$$

$$i M_c^{NV} \epsilon_r^*(k_1) k_{2\nu} = \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_p t^c u(P) \epsilon^{\mu\rho}(k_1) f^{abc} \quad (c)$$

(eq. 199.2)

Esta contribuição cancela a polarização não-física da equação 198.1, mas a suposição que fizemos acaba impondo aquilo que queremos mostrar (que a chance de produzir um bóson de Gauge com polarização não física é zero). De fato, se voltamos no diagrama, em que começamos:



vemos que presença de todas as polarizações nos diagramas "cortados" está ligada ao fato de podermos somar sobre todos os quatro graus de liberdade dos bósons de Gauge virtuais. O que está faltando neste cenário? Como podemos ver que existem de fato só dois graus de liberdade físicos?

Usando regras de Cutkosky, podemos substituir os propagadores dos bósons de Gauge por:

$$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} \rightarrow -i g_{\mu\nu} (-2\pi i) \delta(k^2)$$

$$|\text{Diagram}|^2 \sim \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (iM^{\rho\sigma}) \equiv M^T$$

Definindo:

$$k^\nu = (k^0, \vec{k}) \iff k^2 = 0$$

$$\epsilon^{+\mu} = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|\vec{k}|}, \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \right) \text{ paralelo a } k^\nu$$

$$\epsilon^{-\mu} = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|\vec{k}|}, \frac{-\vec{k}}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \right) \text{ paralelo a } (k^0, -\vec{k}^0)$$

Geram o mesmo espaço que $\epsilon_\mu^{\parallel} = (0, \frac{\vec{k}}{k}$
 $\epsilon_\mu^{\perp} = (1, 0, 0, 0)$
 e junto com as duas polarizações transversas formam uma base para qualquer polarização $\epsilon_1^T, \epsilon_2^T$

$$\delta_{ij} \Rightarrow \epsilon_i^T \cdot \epsilon_j^{*T} = -\delta_{ij} \quad \epsilon^+ \cdot \epsilon_\lambda^T = \epsilon^- \cdot \epsilon_\lambda^T = 0 \quad \epsilon^+ \cdot \epsilon^- = 1$$

$$(\epsilon^+)^2 = (\epsilon^-)^2 = 0$$

(defini as duas polarizações não físicas de forma que são tipo-luz)

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{+\ast} + \epsilon_\mu^+ \epsilon_\nu^{-\ast} - \sum_i \epsilon_{i\mu}^T \epsilon_{i\nu}^{T\ast} \text{ (completeza)}$$

$$M^T = \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) \left(\epsilon_\nu^{-\ast} \epsilon_\rho^+ + \epsilon_\nu^{+\ast} \epsilon_\rho^- - \sum_i \epsilon_{i\nu}^{T\ast} \epsilon_{i\rho}^T \right) \times \left(\epsilon_\nu^{-\ast} \epsilon_\sigma^+ + \epsilon_\nu^{+\ast} \epsilon_\sigma^- - \sum_i \epsilon_{i\nu}^{T\ast} \epsilon_{i\sigma}^T \right) (iM^{\rho\sigma})$$

O que mostramos na 199.2 (somada com a 198.1 é que)

$$i \left(M_{a,b}^{\mu\nu} + M_c^{\mu\nu} \right) \underbrace{\epsilon_{\mu}^{T*}(k_1)}_{\text{polarização transversa para "k}_1"} \underbrace{k_{2\nu}}_{\substack{= \sqrt{2} |k_2| \\ \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{T*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = 0$$

O mesmo vale para:

$$i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{T*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_2) = i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{T*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{\pm*}(k_2) = 0$$

Portanto todos os termos que misturam ϵ_{μ}^T com ϵ^{\pm} são nulos.

Os termos envolvendo só polarizações transversas não nos interessam no momento, eles são a contribuição física que não nos causa espanto, são os termos abaixo que nos causam problemas:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^T &= \frac{1}{2} (i M^{\mu\nu}) (\epsilon_{\mu}^{-*} \epsilon_{\nu}^{+} + \epsilon_{\mu}^{+*} \epsilon_{\nu}^{-}) (\epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\sigma}^{+} + \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\sigma}^{-}) (i M^{\rho\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2} i M^{\mu\nu} (\epsilon_{\mu}^{-*} \epsilon_{\nu}^{+} \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\sigma}^{-} + \epsilon_{\mu}^{+*} \epsilon_{\nu}^{-} \epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\sigma}^{+}) i M^{\rho\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} (i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{-*} \epsilon_{\nu}^{+*}) (i M^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho}^{+} \epsilon_{\sigma}^{-}) + \frac{1}{2} (i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{+*} \epsilon_{\nu}^{-*}) (i M^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho}^{-} \epsilon_{\sigma}^{+}) \end{aligned}$$

$$i M^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = i \left(M_{a,b}^{\mu\nu} + M_c^{\mu\nu} \right) \epsilon_{\mu}^{-*}(k_1) \frac{k_{2\nu}}{\sqrt{2} |k_2|} =$$

(eq 198.1)

$$\begin{aligned} &= \underbrace{-\gamma^2 \bar{v}(P_+) \gamma^{\nu} t^c u(P) \epsilon_{\mu}^{-*}(k_1) f^{abc}}_{\text{este termo cancela com a linha de cima}} \frac{1}{\sqrt{2} |k_2|} + \underbrace{\gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_{\rho} t^c u(P) \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \epsilon_{\mu}^{-*}(k_1) f^{abc}}_{\text{estes termos sobrevivem agora}} \left[\cancel{k_1^{\mu} k_1^{\rho} - k_3^{\mu} k_3^{\rho}} - \gamma^{\rho\mu} (\cancel{k_1^2} - \cancel{k_3^2}) \right] \frac{1}{\sqrt{2} |k_2|} \end{aligned}$$

pag 199

estes termos sobrevivem agora

este termo cancela com a linha de cima

$$i M^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = \int \bar{v}(P_+) \gamma_{\rho} t^c u(P) \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \int^{abc} k_1^{\mu} k_1^{\rho} \frac{1}{\sqrt{2} |k_{21}|}$$

$(k_1^{\nu} = \epsilon^{\nu\alpha}(k_1) \sqrt{2} |k_{21}|)$
 $(\epsilon^{+\rho} \cdot \epsilon_{\nu}^{-} = 1)$

$$i M^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = \int \bar{v}(P_+) \gamma_{\rho} t^c u(P) \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \int^{abc} k_1^{\rho} \frac{|k_1|}{|k_{21}|}$$

A conta para $i M^{1\rho\sigma} \epsilon_{\rho}^{+}(k_1) \epsilon_{\sigma}^{-}(k_2)$ é análoga, e os termos que trocamos + por - equivalem a uma troca de k_1 por k_2 , obtemos então:

$$M^T = \frac{1}{2} \left(\int \bar{v}(P_+) \gamma_{\rho} t^c u(P) \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \int^{abc} k_1^{\rho} \frac{|k_1|}{|k_{21}|} \right) \left(\int \bar{u}(P') \gamma_{\nu} t^d v(P') \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \int^{abc} (-k_2^{\nu}) \frac{|k_2|}{|k_{21}|} \right) + (k_1 \leftrightarrow k_2)$$

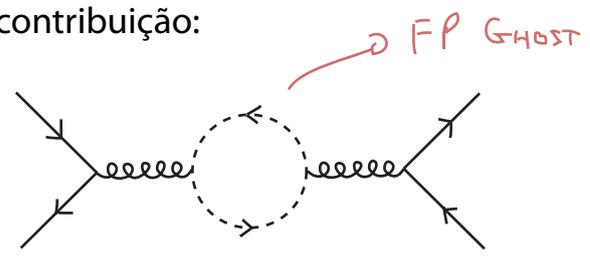
De fato: $\bar{v}(P_+) \gamma_{\nu} k_3^{\nu} u(P) = 0$ (pg 199, cond (3))

logo: $\bar{v}(P_+) \gamma_{\nu} (k_1 + k_2)^{\nu} u(P) = 0 \Rightarrow \bar{v}(P_+) k_1 u(P) = -\bar{v}(P_+) k_2 u(P)$
 este termo é igual ao primeiro ($k_3^2 = (k_1 + k_2)^2$)

$$M^T = \left(\int \bar{v}(P_+) \gamma_{\rho} t^c u(P) \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \int^{abc} k_1^{\rho} \right) \left(\int \bar{u}(P') \gamma_{\nu} t^d v(P') \left(\frac{1}{k_3^2} \right) \int^{abc} (-k_2^{\nu}) \right)$$

(eq. 202.1)

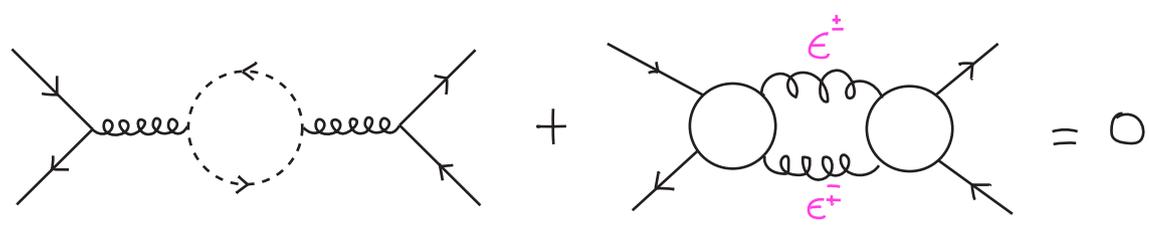
Esta expressão mede a contribuição dos estados com a polarização não física para o espalhamento elétron-pósitron. O ponto chave que queremos notar é que este espalhamento também recebe a seguinte contribuição:



Que também pode ser calculado usando o teorema óptico:

$$\Rightarrow i M_{GH} = i \int \bar{v}(P_+) \gamma^{\mu} t^c u(P) \frac{-i g^{\mu\nu}}{k_3^2} \int^{abc} k_1^{\nu}$$

que é igual ao primeiro fator de 202.1. De fato, o segundo fator vai ser obtido pelo diagrama com os Ghosts no estado inicial e os férmions no final. No entanto quando combinamos as duas partes é preciso incluir um fator -1, porque os Ghosts têm estatística de Fermi. **Isto significa que o loop de Ghosts cancela exatamente a contribuição das polarizações não físicas do Bóson de Gauge:**



Este exemplo nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade "negativos" e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de Gauge com a polarização indesejada. Isto não fica claro no que fizemos acima, de fato nem fica claro que o cancelamento acontece em qualquer diagrama. Para melhorar isto precisamos explorar uma simetria menos óbvia da Lagrangiana, a simetria BRST, o que faremos mais adiante. Antes disso vamos olhar a renormalização de teorias de Gauge no caso não-Abeliano.

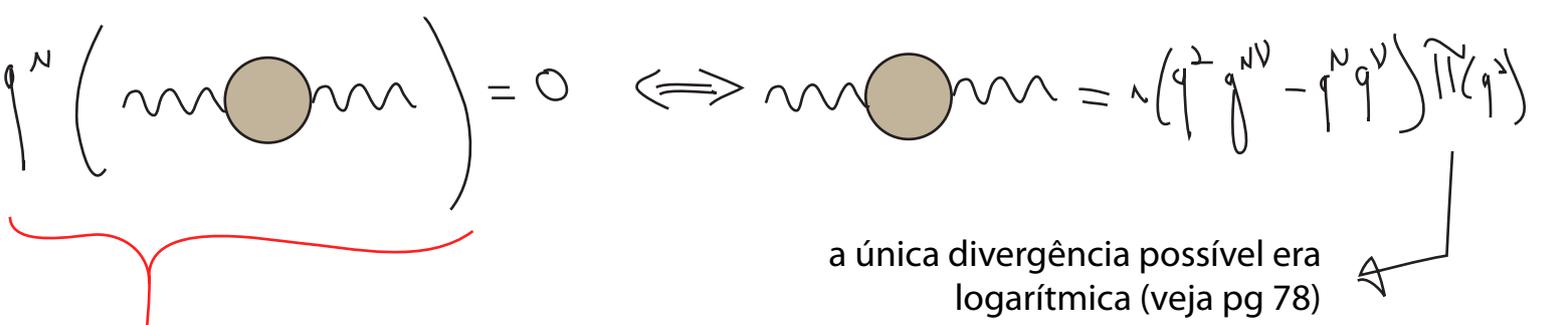
Correções radiativas em teorias não-Abelianas

(Peskin 16.5, Ryder 9.8)

Consideremos agora as correções a um loop para teorias não abelianas. Assim como na QED, esperamos que a simetria de Gauge coloque restrições importantes para que tipo de correção pode aparecer e, conseqüentemente, limite o número de divergências. Começemos com as correções ao propagador do próprio bóson de Gauge

Auto-energia do bóson de Gauge

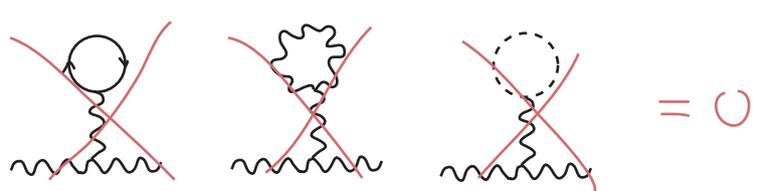
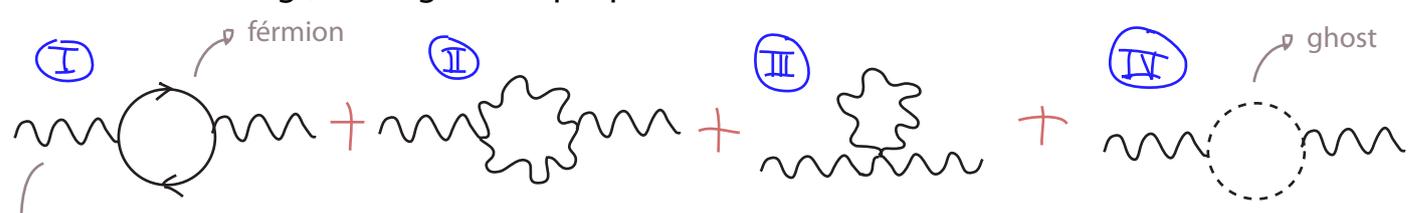
Na QED tínhamos:



a única divergência possível era logarítmica (veja pg 78)

Esta relação continua valendo, mas não provamos isso de forma geral. Por enquanto calcularemos explicitamente, sem impor isso, para ver se funciona no caso não-Abeliano a 1-loop.

Até ordem g^2 , os diagramas que precisamos calcular são:



uma vez que os tadpoles são zero: (proporcionais ao v de j_μ^a , ver pg 76)

O loop fermiônico (I) é muito parecido com o caso abeliano (pgs 90-94) com a diferença de que agora temos um gerador t^a em cada vértice (regra de Feynman 196.2, e como é um loop, tomamos o traço):

$$\text{Diagrama} = \text{Tr}[t^a t^b] i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-8g^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2 - \frac{d}{2}}}$$

(compare com 94.1)

(eq. 204.1)

(estamos ignorando o fator μ^ϵ que apareceria em dim. reg. por isso teremos $\text{Ln}(\Delta)$ por aí)

$SU(N)$
 fundamental: $C(N) = \frac{1}{2}$
 adjunta: $C(G) = N$

$$\left(\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \right) \times \left(\frac{1}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \sim \frac{1}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \in \text{Ln}(\Delta) + \dots \right) \times \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \sim \frac{1}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

parte divergente vem daqui

$$\text{Diagrama} \sim \int C(\alpha) i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-8g^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2})$$

Note que temos um diagrama deste tipo para cada férmion na teoria que interaja com o campo de Gauge. Assumindo que temos n_f férmions, todos se transformando na mesma representação a contribuição total para a parte divergente será:

$$\sum_{\eta_f} (\text{Diagrama}) = i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \int C(\alpha) \left[\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_f C(\alpha) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 204.2)

Ok! O bóson não ganha massa daqui. A divergência é Log.

Usando 196.1 e 197.1 (faremos esta conta no Gauge de Feynman-'t Hooft, $\xi = 1$), calculamos o diagrama (II):

$$\text{Diagrama} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 p^{\alpha c d} p^{\beta c d} N^{\mu\nu}$$

simetria

$$= C_2(G) \delta^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu}$$

$SU(N)$
 $C_2(G) = C(G) = N$

Onde:

$$N^{\mu\nu} = [g^{\mu\rho} (q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma} (p - (-q-p))^\mu + g^{\sigma\mu} (-q-p-q)^\rho] g_{\sigma\sigma'} g_{\rho\rho'} \times [g^{\nu\rho'} (-q+p)^{\sigma'} + g^{\rho'\sigma'} (-p - (q+p))^\nu + g^{\sigma'\nu} (q+p - (-q))^\rho']$$

Usando o procedimento usual:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(Q^2 - \Delta)^2} \quad \begin{aligned} \ell &= p + xq \\ \Delta &= -x(1-x)q^2 \end{aligned}$$

Álgebra: $p = \ell - xq$; $\int d^d \ell \ell_\mu = 0$; $\ell^\mu \ell^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\ell^2}{d}$

$$N^{\mu\nu} = \underbrace{-g^{\mu\nu} \ell^2}_{\text{blue}} \underbrace{6 \left(1 - \frac{1}{d}\right)}_{\text{green}} - \underbrace{g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right]}_{\text{green}} + \underbrace{q^\mu q^\nu \left[(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}}$$

Passando então para o espaço euclidiano e fazendo as integrais em $\int d^d \ell_E$:

$$\text{Diagram} = \frac{i q^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ \underbrace{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{3}{2}(d-1)x(1-x) \right]}_{\text{blue}} + \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right]}_{\text{green}} - \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu \left[(1-\frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}} \right\}$$

(eq. 205.1)

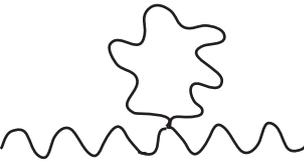
O diagrama (III) é obtido usando a regra 197.2:

$$\begin{aligned} & \text{Diagram} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i f_{p\alpha} \delta^{cd}}{p^2} (-i g^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left[\underbrace{f^{abc} f^{cde}}_{\text{green}} (g^{\mu\nu} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \underbrace{f^{ace} f^{bde}}_{C_2(G) \delta^{ab}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \underbrace{f^{abc} f^{dce}}_{C_2(G) \delta^{ab}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right] \\ & \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})}_{\frac{1}{d}} f_{p\alpha} + \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})}_{\frac{1}{d}} f_{p\alpha} = 2 (g^{\mu\nu} d - g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\text{Diagram} = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1)$$

(eq. 205.2)

Em dim. reg. & (d → 4) esta integral dá zero (veja 52.1 no limite m → 0), mas se quisermos checar a estrutura de Lorentz em geral (em d → 2 onde fica o polo que indica uma divergência quadrática) podemos olhar a soma dos diagramas (II) e (III) antes de integrar e tomar um valor para d, para isso vamos complicar a expressão 205.2:



$$= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1) \frac{(q+p)^2}{(q+p)^2} =$$

$$= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu} (d-1)}{(\ell^2 - \Delta)^2} [\ell^2 + (1-x)^2 q^2] =$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] - \Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[(d-1)(1-x)^2 \right] \right\}$$

(eq. 206.1)

Somando 206.1 e 205.1 temos (considerando os coeficientes dos termos em verde):

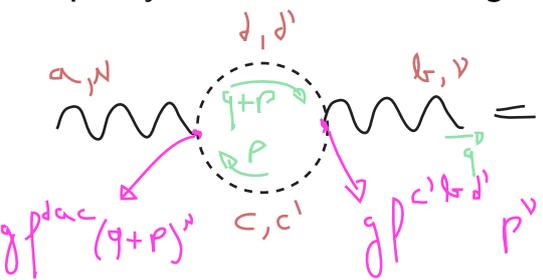
$$\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \quad (a) \Rightarrow -\left[\frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] + \left[\frac{3}{2} (d-1)x(1-x) \right] = \frac{1}{2} (3-d)(d-1)x(1-x)$$

$$\Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \quad (b) \Rightarrow -\left[(d-1)(1-x)^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (2-x)^2 + \frac{1}{2} (1+x)^2 \right]$$

$$\Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \quad (c) \Rightarrow -\left[(1-d/2)(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]$$

(eqs. 206.2)

O que precisamos é que o coeficiente de (b) e (c) sejam iguais (com sinal oposto), e que (a) desapareça. Mais uma vez o diagrama do Ghost é essencial, calculemos (IV) (usando 194.2 e 194.3):



$$= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{abc} f^{c'bd'} \delta^{cc'} \delta^{dd'} (q+p)^\mu p^\nu$$

(eq. 206.3)

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} x(1-x) \right] + \Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \left[x(1-x) \right] \right\}$$

Vejamos primeiramente como isto muda o termo 206.2(a):

$$\boxed{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(a)} \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{(3-d)(d-1)}_{4d-3-d^2} \kappa(1-\kappa) - \frac{1}{2} \kappa(1-\kappa) = \kappa(1-\kappa) \frac{1}{2} \left[4d - 4 - d^2 \right] =$$

$$= \kappa(\kappa-1) \left(1-\frac{d}{2}\right) (2-d)$$

O efeito deste $\left(1-\frac{d}{2}\right)$ é eliminar o polo em $d=2$. Lembre-se (pg. 52) que a função $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$ tem polos em $d=2$ e $d=4$, o que equivale a uma divergência quadrática (que deve sumir se vale a forma que esperamos para a auto-energia). No entanto:

$$\left(1-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

E a função $\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$ só tem polo em $d=4$ (o que equivale a uma divergência logarítmica, que é o que queremos). Assim, podemos trocar 206.2(a) por adicionar uma contribuição igual a:

$$\kappa(\kappa-1)(2-d)$$

Ao termo 206.2 (b):

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(b)} \Rightarrow -(d-1)(1-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(2-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(1+\kappa)^2 + \kappa(\kappa-1)(2-d)$$

Se tudo der certo isto deve ser o termo 206.2 (c) com sinal oposto, vejamos como ficou o termo (c) com a contribuição do Ghost:

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu}^{(c)} \Rightarrow -\left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 + (1+\kappa)(2-\kappa) \right] + \left[\kappa(1-\kappa) \right] =$$

$$= -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - \underbrace{(1+\kappa)(2-\kappa) + \kappa(1-\kappa)}_{-2 + \kappa - 2\kappa + \kappa^2 + \kappa - \kappa^2} = -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - 2$$

Para colocar (b) nesta forma note que estes termos se encontram dentro da integral:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \quad \text{onde: } \Delta = -\kappa(1-\kappa)q^2$$

$$\Delta(x) = \Delta(1-\kappa) \Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \stackrel{\kappa \rightarrow 1-\kappa}{=} -\int_1^0 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa) = \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa)$$

Então podemos fazer esta troca em qualquer um dos termos somados. Em particular:

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}$$

Voltando ao (b):

$$-(d-1)(1-x)^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 + x(x-1)(2-d) =$$

$$= x^2 \left[-(d-2) - (d-1) + 1 \right] + x \left[2(d-1) + (d-2) - 1 \right] - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$-2d+4 = 4\left(1-\frac{d}{2}\right) \quad 2d-2+d-2-1 = 2d-7+(d-1)$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + x(d-1) - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} - \frac{1}{2} - d + 1 + \frac{5}{2} =$$

$$-\frac{d}{2} + \frac{6}{2} = \left(1-\frac{d}{2}\right) + 2$$

$$= \left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2$$

que é exatamente o termo (c) com sinal trocado.

Logo a soma dos diagramas (II), (III) e (IV) nos dá:

$$\frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right]$$

(eq. 208.1)

Que tem a forma necessária para não dar massa ao bóson de Gauge e está livre de divergências quadráticas, como esperávamos. A parte divergente da soma destes diagramas é dada por:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \quad \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \sim 1$$

$$\rightarrow \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right] =$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left[-\frac{1}{3} + 2 \right] =$$

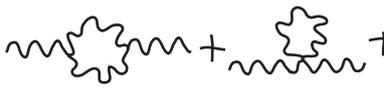
$$= i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{3} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] \quad (\text{eq. 209.1})$$

Parte dependente de Gauge

Lembrando que este resultado foi obtido no Gauge Feynman-'t Hooft ($\xi = 1$). Se tivéssemos feito o mesmo em um Gauge geral, muito pouco mudaria. Basta fazer a troca:

$$-\frac{5}{3} \rightarrow -\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2}\right)$$

em 176.1 para obter o resultado geral:



$$= i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{13}{6} + \frac{\xi}{2} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] + \dots$$

(eq. 209.2)

Função β

Uma vez que façamos a renormalização da teoria de Gauge não-abeliano teremos que introduzir os seguintes contratermos:

$$\text{gluon self-energy} = -i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3$$

$$\text{ghost self-energy} = i \delta_2$$

$$\text{fermion self-energy} = i g^2 t^a \gamma^\mu \delta_1$$

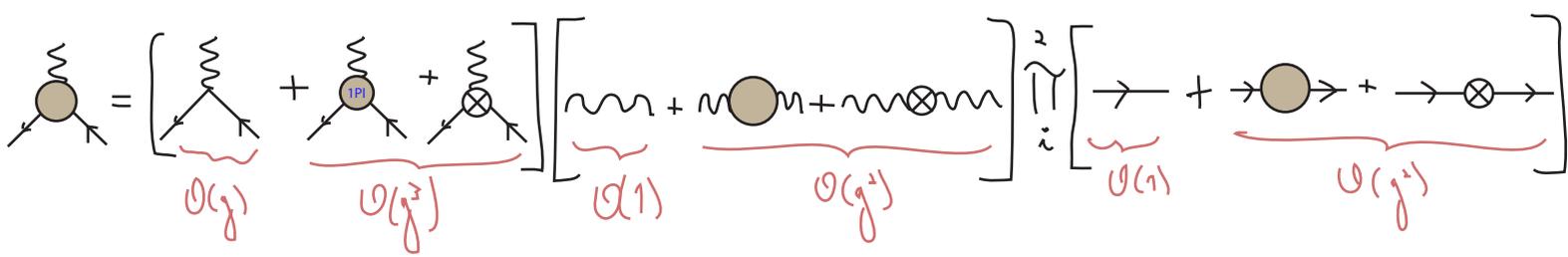
Poderíamos seguir a mesma lógica usada para um campo escalar nas pages 152-153 e obter o análogo da equação 153.1 para o bóson de Gauge (uma versão detalhada disso está nas notas de QFTII de 2013, pg 177):

$$\delta_3(g) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dm} \delta_3 \quad (\text{eq. 209.3})$$

O mesmo raciocínio nos daria, para o férmion:

$$\delta_2(g) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dm} \delta_2 \quad (\text{eq. 209.4})$$

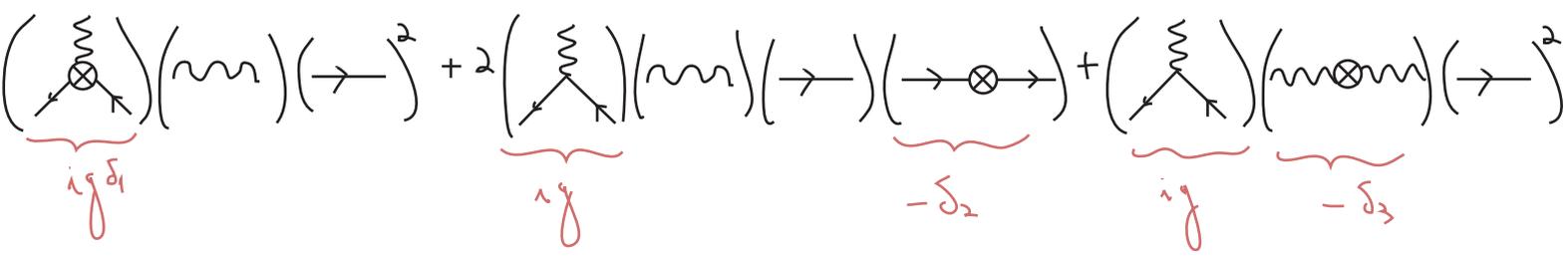
A função de Green de três pontos nos fornece o contratermo δ_1 e a função beta:



A lógica é análoga àquela da pag 153. A equação de Callan-Symanzik é:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + 2\delta_2(g) + \delta_3(g) \right] G^{(3)} = 0$$

As contribuições para $\frac{dG^{(3)}}{dM}$ vêm dos contratermos e começam em ordem g^3 :



$$M \frac{d}{dM} G^{(3)} = (\text{tree with loop}) M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3)$$

$$\frac{dG^{(3)}}{dg} \underset{\text{L.O.}}{=} i (\text{tree with loop}) \quad G^{(3)} \underset{\text{L.O.}}{=} i g (\text{tree with loop})$$

$$(\text{tree with loop}) \left[M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3) + i \beta(g) + i g M \frac{d}{dM} \delta_2 + i g \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \right] = 0$$

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left(-\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 \right)$$

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left[-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right] \quad (\text{eq. 210.1})$$

(que pode ser comparado com o resultado para a QED, eq 155.1)

Agora só resta determinar os contratermos, δ_3 tem que cancelar a parte divergente das equações 204.2 e 209.2, portanto deve ser ($\xi = 1$):

$$\delta_3 = \left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{4}{3} \eta_p C(\pi) + \left(-\frac{5}{3} \right) C_2(G) \right] \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} =$$

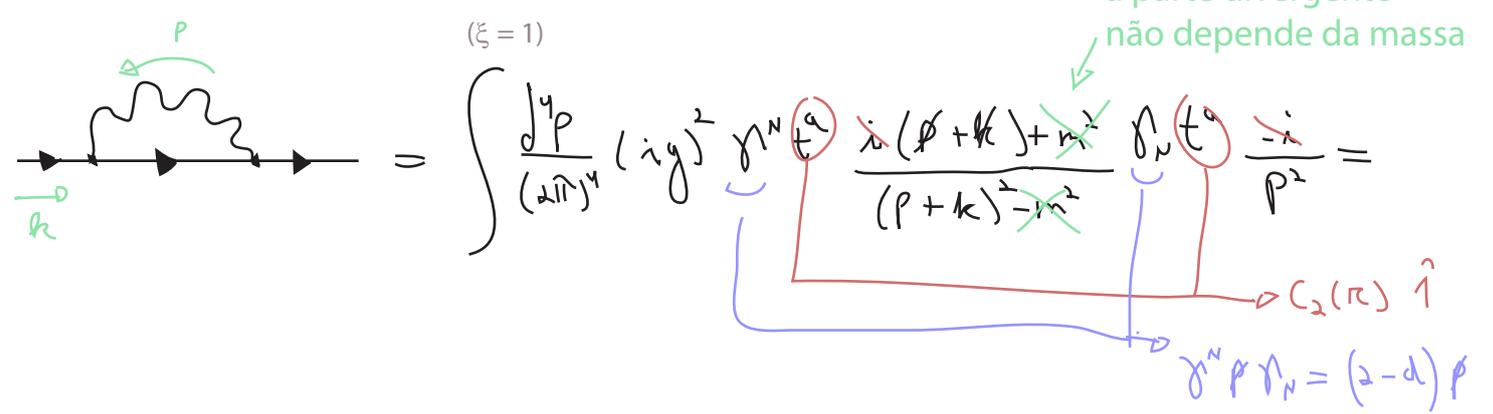
quais destes termos e incluo em δ_3 depende do esquema, mas nada disso influencia a função β em L.O.

$\sim \left(\frac{2}{\epsilon} + L_N \left(\frac{1}{M^2} \right) + \text{Improp}(M^2) + O(\epsilon) \right)$

$SU(N) \rightarrow C_2(G) = C(G) = N$

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} \eta_p C(\pi) \right] \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 211.1})$$

Para obter δ_2 temos que calcular o diagrama:



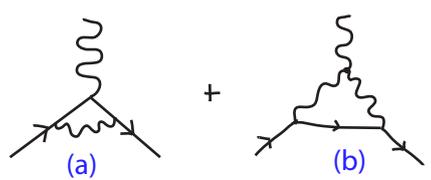
$$= -g^2 C_2(\pi) (2-d) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p+k)}{(p+k)^2 p^2} = g^2 C_2(\pi) (d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)k}{(\ell^2 - \Delta)^2} =$$

$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(\pi) k \int_0^1 dx (1-x) (d-2) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} k C_2(\pi) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \quad (\text{eq. 211.2})$$

parte divergente

$$\left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right]_{M^2} \Rightarrow \delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} C_2(\pi) \quad (\text{eq. 211.3})$$

Resta apenas calcular δ_1 , que vem das correções ao vértice, que a 1-loop são:



$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}$$

$$t^b t^a t^b = \underbrace{t^b t^b t^a}_{C_2(\mathfrak{r})} + t^b \underbrace{[t^a, t^b]}_{i f^{abc} t^c} = C_2(\mathfrak{r}) t^a + i f^{abc} t^b t^c =$$

$$= \frac{1}{2} [f^{abc} t^b t^c + f^{abc} t^c t^b] =$$

$$= \frac{1}{2} f^{abc} [t^b, t^c] = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d$$

$$= C_2(\mathfrak{r}) t^a - \frac{1}{2} \underbrace{f^{abc} f^{bcd}}_{C_2(\mathfrak{g}) \delta^{ad}} t^d = \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a$$

Podemos obter a divergência deste diagrama de forma simples, tomando o limite p grande (nos casos anteriores haviam divergências quadráticas que precisavam se cancelar, por isso foi tomado um cuidado maior).

$$\sim g^3 \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{(p^2)^3} =$$

$$= \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \gamma^\mu \left[\Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 212.1)

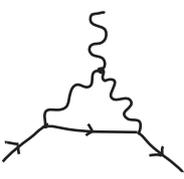
Usando a mesma lógica para o diagrama (b), temos:

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (i g \not{\partial}_\nu t^b) \frac{1}{p^2} (i g \not{\partial}_\mu t^c) \frac{-i}{(k-p)^2} \frac{-i}{(k-p)^2}$$

$$\cdot g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (q+k-p)^p + g^{\nu\mu} (-k'-k+p)^N + g^{\mu\nu} (k-p-q)^p \right]$$

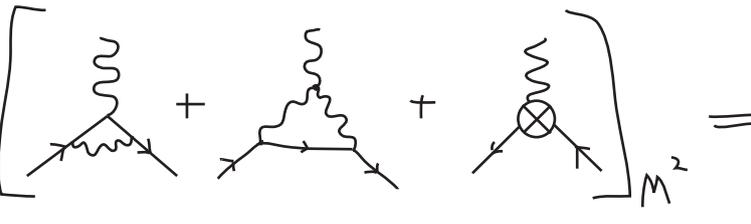
$$f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(\mathfrak{g}) t^a$$

↳ conforme vimos acima



$$p \gg \hbar, k, l \quad \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\nu\rho} p^\nu + g^{\rho\mu} p^\rho}{(p^2)^3} \sim$$

$$\sim \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^N \left(\Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right) \quad (\text{eq. 213.1})$$



$$\left[\text{triangle gluon} + \text{triangle fermion} + \text{ghost loop} \right]_{M^2} = D \quad \beta_1 = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left[C_2(R) + C_2(G) \right] \quad (\text{eq. 213.2})$$

Finalmente, usando 210.1, 211.1 e 211.3:

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left[-\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{2} \beta_3 \right] \stackrel{(\text{eq. 211.3})}{=} -2g \left[\frac{+g^2}{(4\pi)^2} (C_2(R) + C_2(G)) - \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(R) + \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right) \right] =$$

$\left(M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} = M \frac{d}{dM} \left(\ln \frac{1}{M} \right) + \dots = -2 \right)$

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[+2 C_2(R) + 2 C_2(G) - 2 C_2(R) + \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right] =$$

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right]$$

Que é negativo para $n_f \cdot C(R) < \frac{11}{4} C_2(G)$

SU(N): $C_2(G) = N$
 Férmiões na fundamental: $C(N) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow n_f < \frac{11}{2} N$$

$$\text{QCD: } \begin{cases} N=3 \\ n_f=6 < \frac{33}{2} \end{cases}$$

Teorias que satisfizerem esta condição terão constantes de acoplamento que vão a zero (asintoticamente) para energias altas, é isto que chamamos de **Liberdade Assintótica** e isto de fato ocorre na QCD).