Espalhamento Compton e a Física da Radiação Cósmica de Fundo

Guilherme de Souza Fernandes

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Sumário

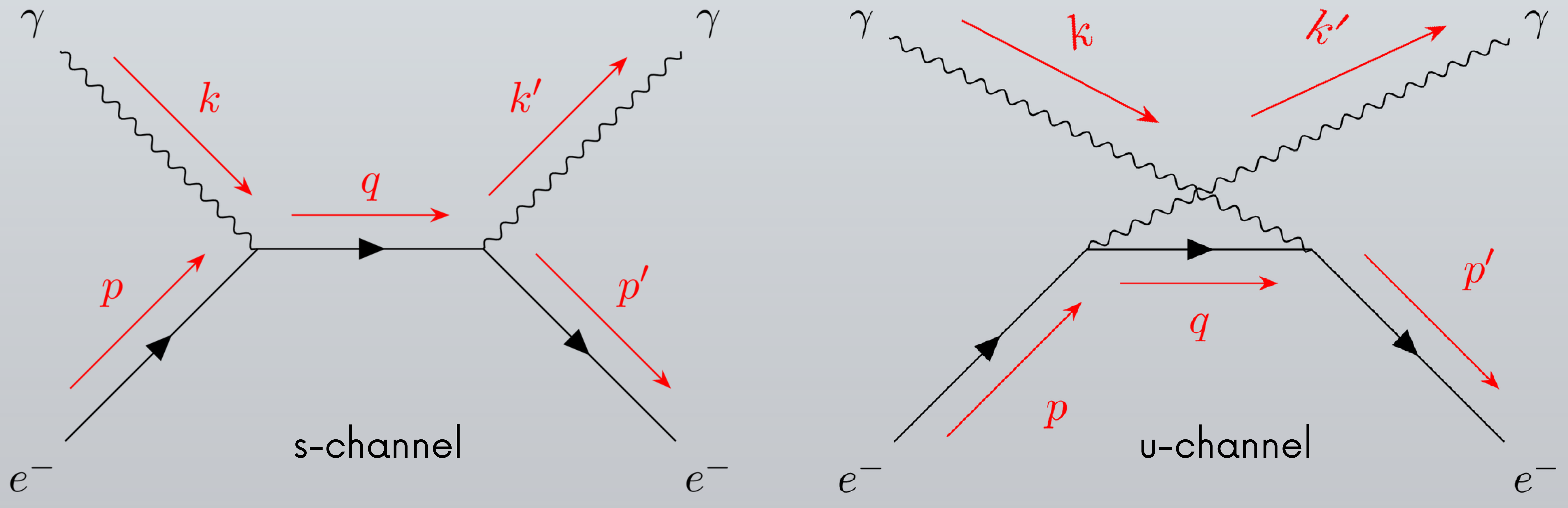
Introdução e motivação

O espalhamento Compton, apesar de ser um dos processos mais simples da QED (Quantum Electrodynamics), apresenta uma rica fenomenologia. O principal objetivo desse seminário é mostrar o processo de cálculo da seção de choque desse espalhamento utilizando ferramentas da Teoria Quântica de Campos. Vamos explorar as consequências físicas dessa derivação na menor ordem possível da teoria de perturbação e ao final mostrar aplicações na cosmologia.

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$$

QED: regras de Feynman e diagramas de nível árvore

Em nível árvores, os digramas de Feynman relevantes são:



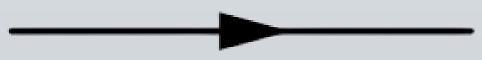
$q = p + k = k' + p'$

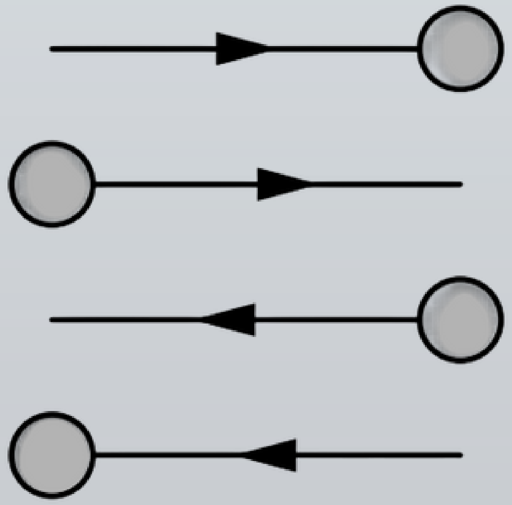
$q = p - k' = p' - k$

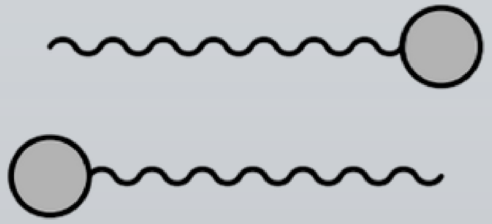
QED: regras de Feynman

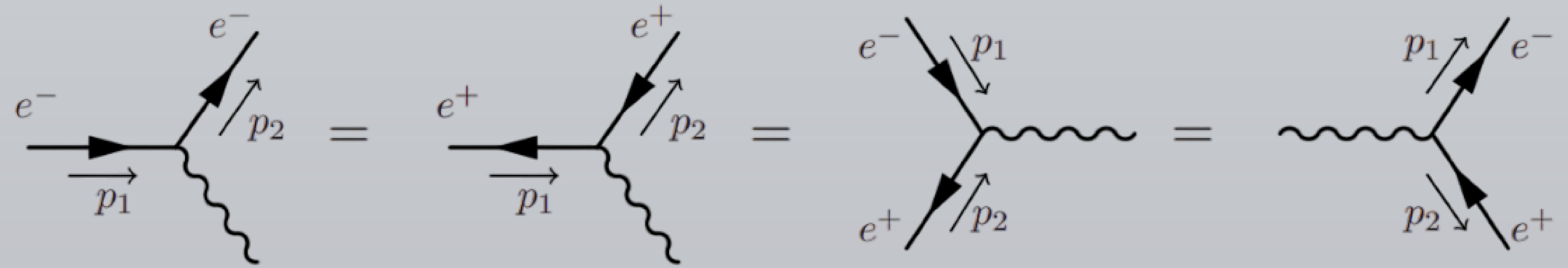
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$


$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \quad \text{(Feynman gauge)}$$


$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$


$$= u^s(p)$$
$$= \bar{u}^s(p)$$
$$= \bar{v}^s(p)$$
$$= v^s(p)$$

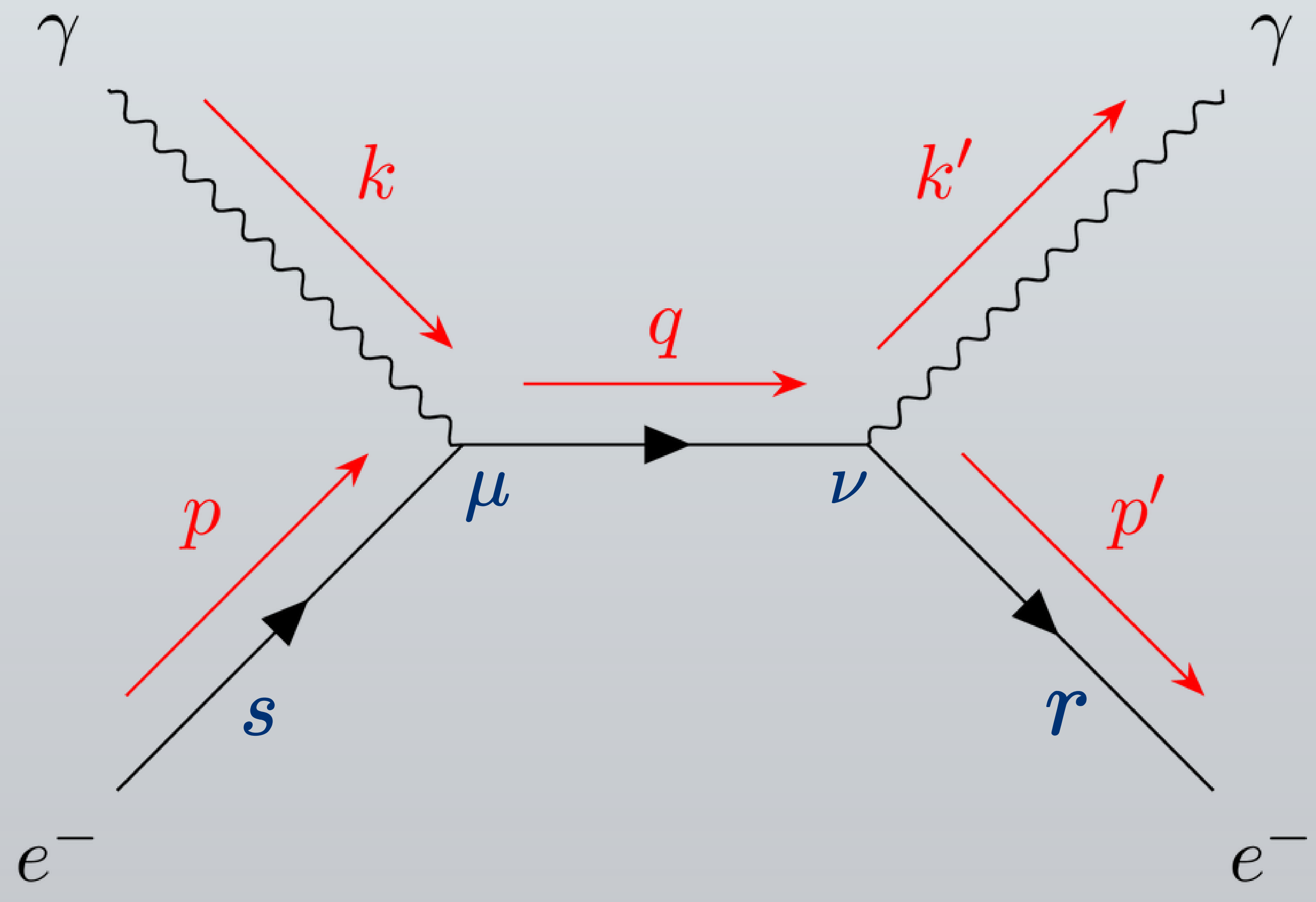

$$= \epsilon_\mu(p) \quad \text{(incoming)}$$
$$= \epsilon^\star_\mu(p) \quad \text{(outgoing)}$$



$$= -ie\gamma^\mu$$

Cálculo do elemento da matriz S

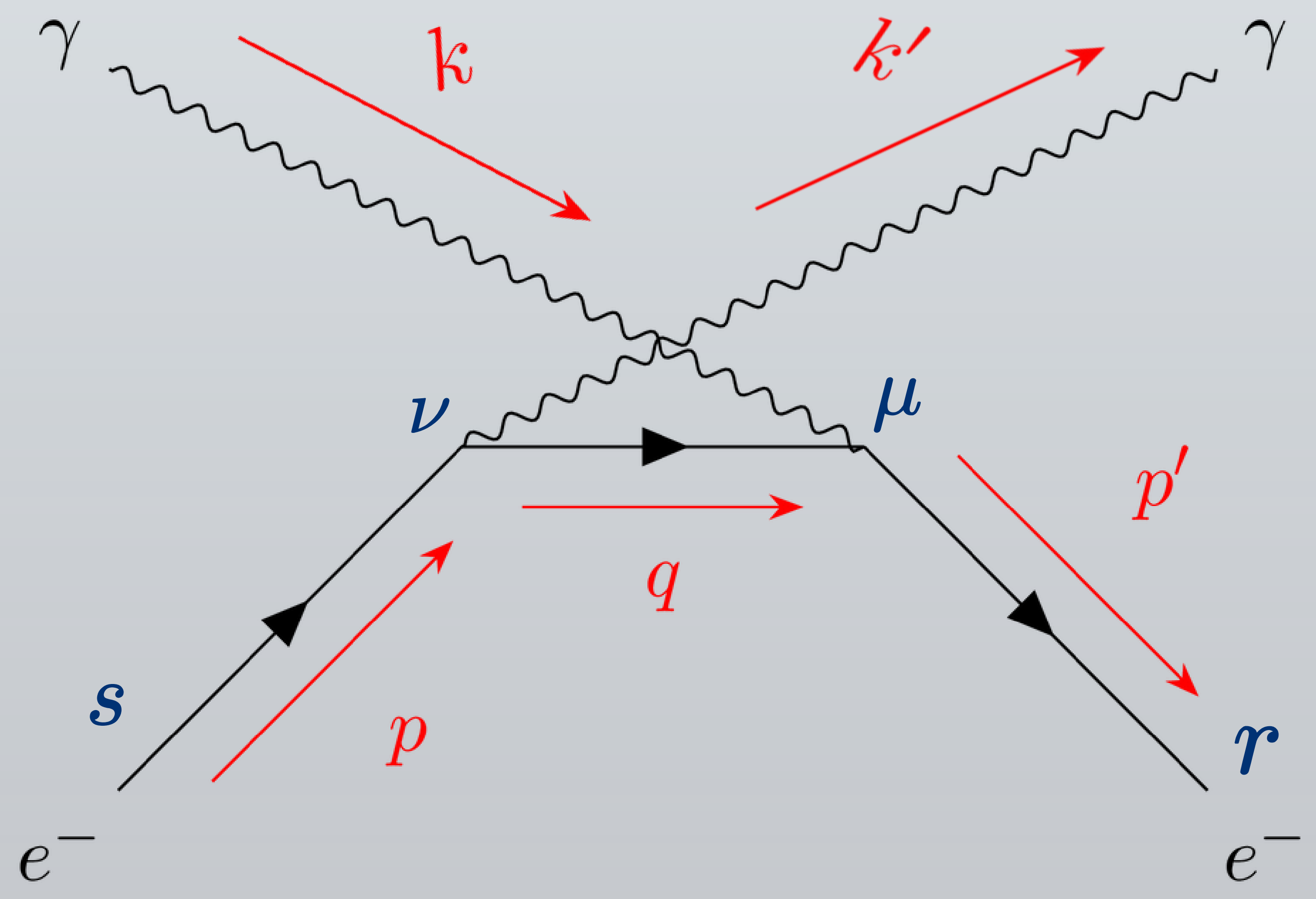
Convencionamos os índices para o spin dos elétrons e para a polarização dos fótons (incidentes e espalhados):



$$i\mathcal{M}_s = \bar{u}^r(p')(-ie\gamma^\nu)\epsilon^*_\nu(k')\frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2}(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu(k)u^s(p)$$

Cálculo do elemento da matriz S

Convencionamos os índices para o spin dos elétrons e para a polarização dos fótons (incidentes e espalhados):



$$i\mathcal{M}_u = \bar{u}^r(p')(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu(k)\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}(-ie\gamma^\nu)\epsilon^*_\nu(k')u^s(p)$$

Cálculo do elemento da matriz S

Antes de prosseguir para o cálculo de $|\mathcal{M}|^2$ podemos fazer algumas simplificações:

$$i\mathcal{M} = -ie^2\bar{u}^r(p')\left[\gamma^\nu\epsilon_\nu^*(k')\frac{(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\gamma^\mu\epsilon_\mu(k)+\gamma^\mu\epsilon_\mu(k)\frac{(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\epsilon_\nu^*(k')\right]u^s(p)$$
$$= -ie^2\epsilon_\nu^*(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\nu}{(p-k')^2-m^2}\right]u^s(p)$$

$$p^2=(p')^2=m^2 \quad , \quad k^2=(k')^2=0 \quad , \quad (\not{p}-m)u(p)=0 \quad \text{(Dirac Equation)}$$

$$(p+k)^2-m^2=p^2+2p\cdot k+k^2-m^2=2p\cdot k \quad , \quad (p-k')^2-m^2=-2p\cdot k'$$

$$(\not{p}+m)\gamma^\nu u(p)=(p_\mu\gamma^\mu+m)\gamma^\nu u(p)=p_\mu(2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)u(p)+m\gamma^\nu u(p)=$$
$$=2p^\nu u(p)-\gamma^\nu(\not{p}-m)u(p)=2p^\nu u(p)$$

Cálculo do elemento da matriz S

Antes de prosseguir para o cálculo de $|\mathcal{M}|^2$ podemos fazer algumas simplificações:

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= -ie^2\bar{u}^r(p')\left[\gamma^\nu \epsilon^*_\nu(k')\frac{(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\gamma^\mu\epsilon_\mu(k)+\gamma^\mu\epsilon_\mu(k)\frac{(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\epsilon^*_\nu(k')\right]u^s(p)\\
&= -ie^2\epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\mu}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\nu}{(p-k')^2-m^2}\right]u^s(p)
\end{aligned}
$$

$$\Big\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= -ie^2\epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu+\gamma^\nu\not{k}\gamma^\mu}{2p\cdot k}+\frac{2\gamma^\mu p^\nu-\gamma^\mu\not{k}'\gamma^\nu}{-2p\cdot k'}\right]u^s(p)\\
&= -ie^2\epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu+\gamma^\nu\not{k}\gamma^\mu}{2p\cdot k}+\frac{-2\gamma^\mu p^\nu+\gamma^\mu\not{k}'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right]u^s(p)
\end{aligned}
$$

Cálculo do elemento da matriz S

$$i\mathcal{M} = -ie^2\epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu\ \not{k}\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu\ \not{k}'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right]u^s(p)$$

Para tirar o complexo conjugado usaremos a identidade:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \qquad\qquad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0$$

$$[\bar{u}(p)\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}u(p')]^* = [u^\dagger(p)\gamma^0\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}u(p')]^\dagger = \bar{u}(p')\gamma^{\mu_n}\ldots\gamma^{\mu_1}u(p)$$

$$-i\mathcal{M}^* = ie^2\epsilon_\rho(k')\epsilon^*_\sigma(k)\bar{u}^s(p)\left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma + \gamma^\sigma\ \not{k}\gamma^\rho}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\sigma p^\rho + \gamma^\rho\ \not{k}'\gamma^\sigma}{2p\cdot k'}\right]u^r(p')$$

Soma sobre as polarizações e sobre os spins

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m \qquad , \qquad \sum_{polarizations} \epsilon^*_\mu \epsilon_\nu \to -g_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{4}\sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\sum \epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\bar{u}^r(p')\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right]u^s(p)\cdot$$
$$\cdot\, \epsilon_\rho(k')\epsilon^*_\sigma(k)\bar{u}^s(p)\left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma + \gamma^\sigma \not{k}\gamma^\rho}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\sigma p^\rho + \gamma^\rho \not{k}'\gamma^\sigma}{2p\cdot k'}\right]u^r(p')$$

$$\frac{1}{4}\sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\sum_{s,r} g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}\bar{u}^r_a(p')\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right]_{ab} u^s(p)_b\cdot$$
$$\cdot\, \bar{u}^s_c(p)\left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma + \gamma^\sigma \not{k}\gamma^\rho}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\sigma p^\rho + \gamma^\rho \not{k}'\gamma^\sigma}{2p\cdot k'}\right]_{cd} u^r_d(p')$$

Soma sobre as polarizações e sobre os spins

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}Tr\left\{(\not p' + m)\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not k\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not k'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right](\not p + m)\left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma + \gamma^\sigma \not k\gamma^\rho}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\sigma p^\rho + \gamma^\rho \not k'\gamma^\sigma}{2p\cdot k'}\right]\right\}$$

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}Tr\left\{(\not p' + m)\left[\frac{2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not k\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not k'\gamma^\nu}{2p\cdot k'}\right](\not p + m)\left[\frac{2\gamma_\nu p_\mu + \gamma_\mu \not k\gamma_\nu}{2p\cdot k} + \frac{-2\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu \not k'\gamma_\mu}{2p\cdot k'}\right]\right\}$$

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\left[\frac{\mathbf{I}}{(2p\cdot k)^2} + \frac{\mathbf{II}}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')} + \frac{\mathbf{III}}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)} + \frac{\mathbf{IV}}{(2p\cdot k')^2}\right]$$

Cálculo do traço das matrizes gamma

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\left[\frac{\mathbf{I}}{(2p\cdot k)^2} + \frac{\mathbf{II}}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')} + \frac{\mathbf{III}}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)} + \frac{\mathbf{IV}}{(2p\cdot k')^2}\right]$$

$$\mathbf{I} = Tr[(\not{p}' + m)(2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu)(\not{p} + m)(2\gamma_\nu p_\mu + \gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu)]$$

$$\mathbf{II} = Tr[(\not{p}' + m)(2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu)(\not{p} + m)(-2\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu \not{k}'\gamma_\mu)]$$

$$\mathbf{III} = Tr[(\not{p}' + m)(-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu)(\not{p} + m)(2\gamma_\nu p_\mu + \gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu)]$$

$$\mathbf{IV} = Tr[(\not{p}' + m)(-2\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu)(\not{p} + m)(-2\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu \not{k}'\gamma_\mu)]$$

Cálculo do traço das matrizes gamma

$$\mathbf{I} = Tr[(\not{p}' + m)(2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu)(\not{p} + m)(2\gamma_\nu p_\mu + \gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu)]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= Tr[(\not{p}' + m)(2\gamma^\nu p^\mu + \gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu)(\not{p} + m)(2\gamma_\nu p_\mu + \gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu)] \\ &= 4p'_\rho p_\sigma Tr[\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\nu p^\mu p_\mu] + 4Tr[m^2\gamma^\nu p^\mu \gamma_\nu p_\mu] + Tr[m\,\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu m\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu] + Tr[\not{p}'\,\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu \not{p}\,\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu] \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

Para calcular esses termos, usaremos as seguintes propriedades:

$$Tr[\text{any odd \# of } \gamma\text{'s}] = 0 \quad , \quad Tr[\mathbf{1}] = 4 \quad , \quad Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

$$Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad , \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$$

Cálculo do traço das matrizes gamma

Desse modo:

$$Tr[\not{p}'\, 2\gamma^{\nu}p^{\mu}\ \ \not{p}\, 2\gamma_{\nu}p_{\mu}] = 4p'_{\rho}p_{\sigma}Tr[\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma_{\nu}p^{\mu}p_{\mu}] = -8m^2p'_{\rho}p_{\sigma}Tr[\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}] = -32m^2\, p'\cdot p$$

$$4Tr[m^2\gamma^{\nu}p^{\mu}\gamma_{\nu}p_{\mu}] = 4m^4Tr[\gamma^{\mu}\gamma^{\mu}] = 64m^2 \qquad \text{because} \qquad 2\gamma^{\nu}\gamma_{\nu} = \{\gamma^{\nu}\gamma_{\nu}\} = 2g^{\nu}_{\nu} = 8\cdot\mathbf{1}$$

$$Tr[m\,\gamma^{\nu}\ \ \not{k}\gamma^{\mu}m\gamma_{\mu}\ \ \not{k}\gamma_{\nu}] = 16m^2k_{\rho}k_{\sigma}Tr[\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}] = 64m^2\,k\cdot k = 0$$

$$\begin{aligned} Tr[\not{p}'\,\gamma^{\nu}\ \ \not{k}\gamma^{\mu}\ \ \not{p}\,\gamma_{\mu}\ \ \not{k}\gamma_{\nu}] &= p'_{\sigma}k_{\alpha}p_{\rho}k_{\beta}Tr[\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu}\gamma^{\beta}\gamma_{\nu}] \\ &= 4p'_{\sigma}k_{\alpha}p_{\rho}k_{\beta}Tr[\gamma^{\sigma}\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho}\gamma^{\beta}] = 32(p\cdot k)(p'\cdot k) \end{aligned}$$

Convém agora partir para a fórmula final de $\mathbf{I}$, dado que o restante dos cálculos é apenas uma questão operacional.

Variáveis de Mandelstam

$$\mathbf{I} = 16(4m^4 - 2m^2 p\cdot p' + 4m^2 p\cdot k - 2m^2 p'\cdot k + 2(p\cdot k)(p'\cdot k))$$

Simplificamos a expressão:

$$\begin{aligned}
s &= (p+k)^2 = 2p\cdot k + m^2 = 2p'\cdot k' + m^2 \\
t &= (p'-p)^2 = -2p\cdot p' + 2m^2 = -2k\cdot k' \\
u &= (p-k')^2 = -2k'\cdot p + m^2 = -2k\cdot p' + m^2 \\
2m^2 &= s + t + u
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = 16\left[2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right]$$

Variáveis de Mandelstam

O termo IV vem de $|\mathcal{M}_u|^2$, o que equivale à troca $k \to -k'$. Sendo assim obtemos o resultado imediatamente a partir de $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{I} = 16\left[2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right]$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{IV} = 16\left[2m^4 + m^2(u-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right]$$

O cálculo dos demais termos prossegue da mesma maneira:

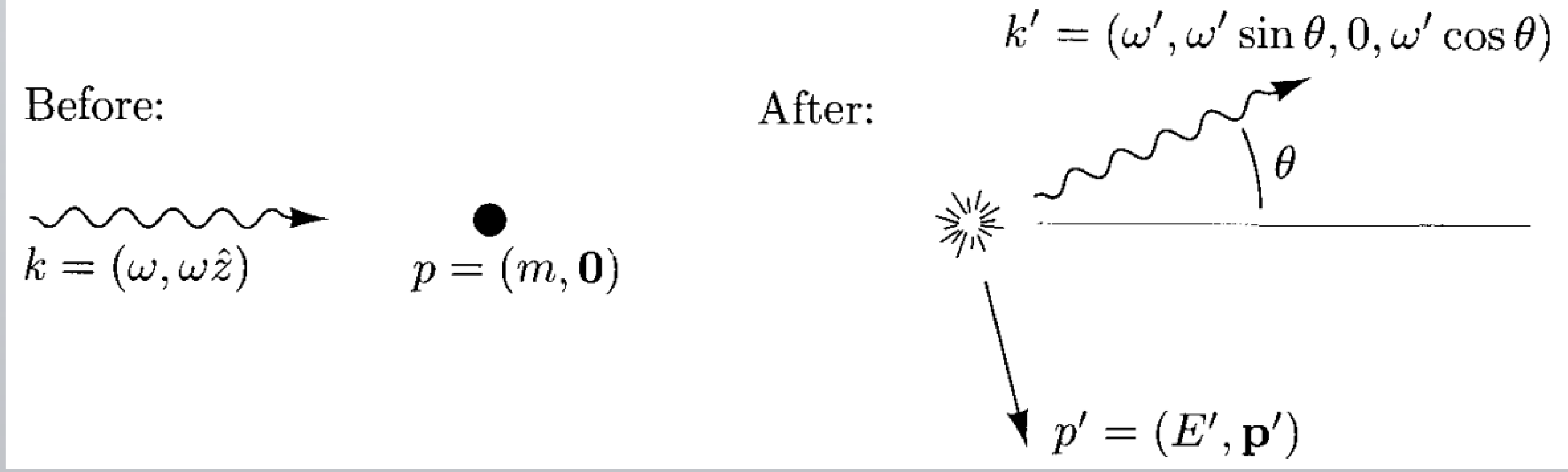
$$\mathbf{II} = \mathbf{III} = -8(4m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2))$$

Cálculo da seção de choque

Juntando todo o resultado e simplificando, chegamos em:

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right]$$

Para o cálculo da seção de choque vamos trabalhar no referencial em que o elétron está inicialmente em repouso:



Cálculo da seção de choque

Com isso:

$$
\begin{aligned}
k &= (\omega, 0, 0, \omega) \\
p &= (m, 0, 0, 0) \\
k' &= \omega'(1, \sin\theta, 0, \cos\theta) \\
p' &= (E', \vec{p}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m^2 = (p')^2 = (p + k - k')^2 &= p^2 + 2p\cdot(k - k') - 2k\cdot k' \\
&= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} - \frac{(1-\cos\theta)}{m} \longrightarrow \omega' = \frac{\omega}{1 + \beta(1 - \cos\theta)} \quad , \quad \beta = \frac{\omega}{m}
$$

Cálculo da seção de choque

Nesse referencial, a integral no espaço de fase é dada por:

$$\int d\Pi = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega'}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+p'-k-p) =$$

$$= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi^3)}\frac{1}{4\omega' E'}2\pi\delta(\omega' + \sqrt{m^2+\omega^2+(\omega')^2-2\omega\omega'\cos\theta}-\omega-m)$$

$$= \int \frac{d\cos\theta}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\frac{1}{\left|1+\dfrac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\right|} = \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\frac{\omega'}{m+\omega(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\frac{(\omega')^2}{\omega m}$$

$$\delta(f(x)-f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

Cálculo da seção de choque

Como $|v_A - v_B| = 1:$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\omega}\frac{1}{2m}\frac{1}{8\pi}\frac{(\omega')^2}{\omega m}\left(\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2\right)$$

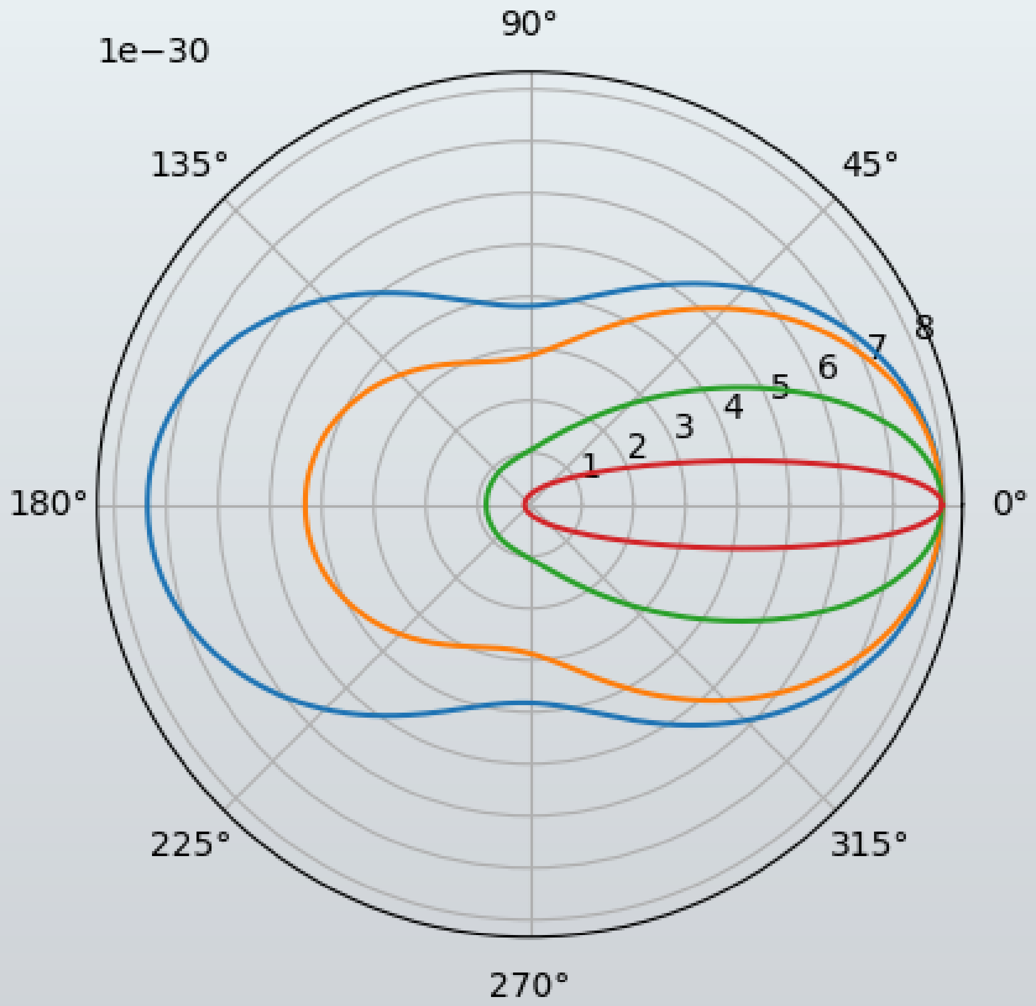
$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right]$$

$$p\cdot k = m\omega \qquad , \qquad p\cdot k' = m\omega'$$

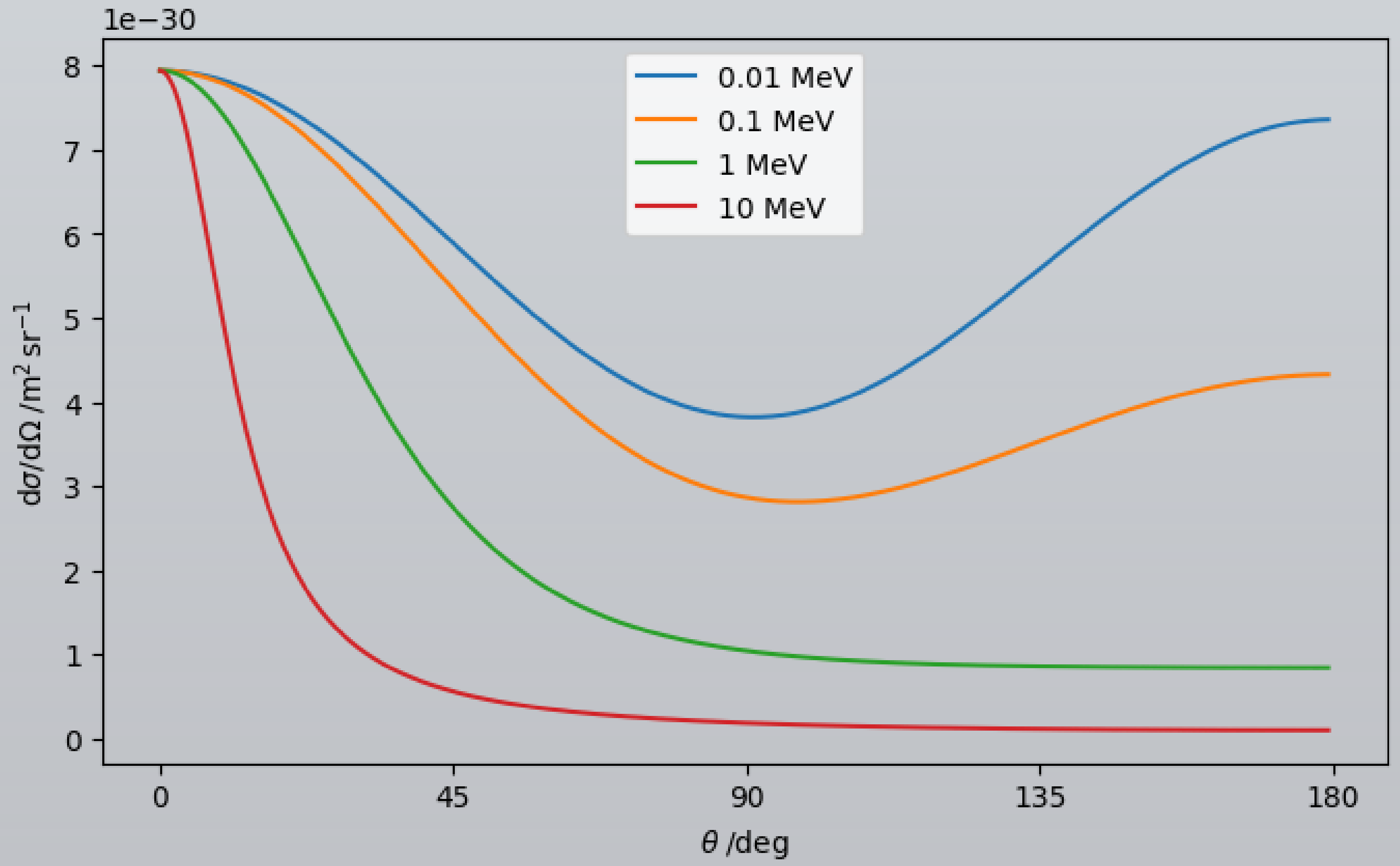
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right]}$$

Essa é a fórmula de Klein-Nishina para a seção de choque diferencial do espalhamento Compton.

A fórmula de Klein-Nishina



$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right]}$$



Limite de baixas energias

Se $\omega << m$ temos $\omega' \approx \omega$, de modo a recuperar a seção de choque clássica do espalhamento Thomson (limite de baixas energias do espalhamento Compton):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + cos^2\theta) \quad , \quad \sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}$$

Introdução à cosmologia fiducial

Na cosmologia partimos do princípio cosmológico, pelo qual o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas.

Table 1.1 Important length scales of the universe (in different units)

Object	Size [km]	Size [ly]	Size [Mpc]
Earth	6371	6.7×10^{-10}	2.1×10^{-16}
Distance to Sun	1.5×10^{8}	1.6×10^{-5}	4.8×10^{-12}
Solar System	4.5×10^{9}	4.7×10^{-4}	1.5×10^{-10}
Milky Way Galaxy	1.0×10^{18}	105 700	0.032
Local Group	9×10^{19}	9×10^{6}	3
Local Supercluster	5×10^{21}	5×10^{8}	150
Universe	4.4×10^{23}	46.5 billion	14 000

FLRW metric

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

Introdução à cosmologia fiducial

Conseguimos calcular a taxa de expansão do universo conhecendo seu conteúdo (radiação, matéria bariônica, matéria escura e energia escura). Tomamos aproximações de fluidos perfeitos para trabalhar com essas componentes a nível de background (sem perturbações). Da componente 00 das equações de Einstein obtemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad\qquad \frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \sum_{s=\mathrm{r,m},\nu,\mathrm{DE}} \Omega_s \left[a(t)\right]^{-3(1+w_s)}$$

Introdução à cosmologia fiducial

Porém, para extrair o máximo que a cosmologia pode nos oferecer, é necessário avançar para a teoria de perturbação. Isso se dá por perturbações tanto da métrica quanto das componente do tensor energia-momento.

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Além disso, da física estatística, incorporamos a equação de Boltzmann, que relaciona a distribuição estatística de determinado componente do nosso universo (e aqui é possível trabalhar a nível das partículas) com seus termos de fonte, impondo uma dinâmica ao sistema.

$$\frac{df}{dt} = C[f]$$

Introdução à cosmologia fiducial

Aqui vemos surgir expressões muito familiares à teoria quântica de campos:

$$\frac{df(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)}{dt}=0 \quad \text{where} \quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla_x+\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla_p \qquad \text{(caso sem fontes)}$$

$$(1)_{\boldsymbol{p}}+(2)_{\boldsymbol{q}}\longleftrightarrow(3)_{\boldsymbol{p}'}+(4)_{\boldsymbol{q}'} \qquad \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'; \quad E_1(\boldsymbol{p})+E_2(\boldsymbol{q})=E_3(\boldsymbol{p}')+E_4(\boldsymbol{q}')$$

$$C[f_1(\boldsymbol{p})]=\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}'}^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'}\delta_{\mathrm{D}}^{(1)}(E_1(p)+E_2(q)-E_3(p')-E_4(q'))\,|\mathcal{M}|^2$$
$$\times\{f_3(\boldsymbol{p}')f_4(\boldsymbol{q}')-f_1(\boldsymbol{p})f_2(\boldsymbol{q})\}$$

Introdução à cosmologia fiducial

Outro aspecto importante é que, como consequência da física estatística fermiônica e bosônica conseguimos modelar o comportamento do plasma após o Big Bang (Hot Big Bang model).

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

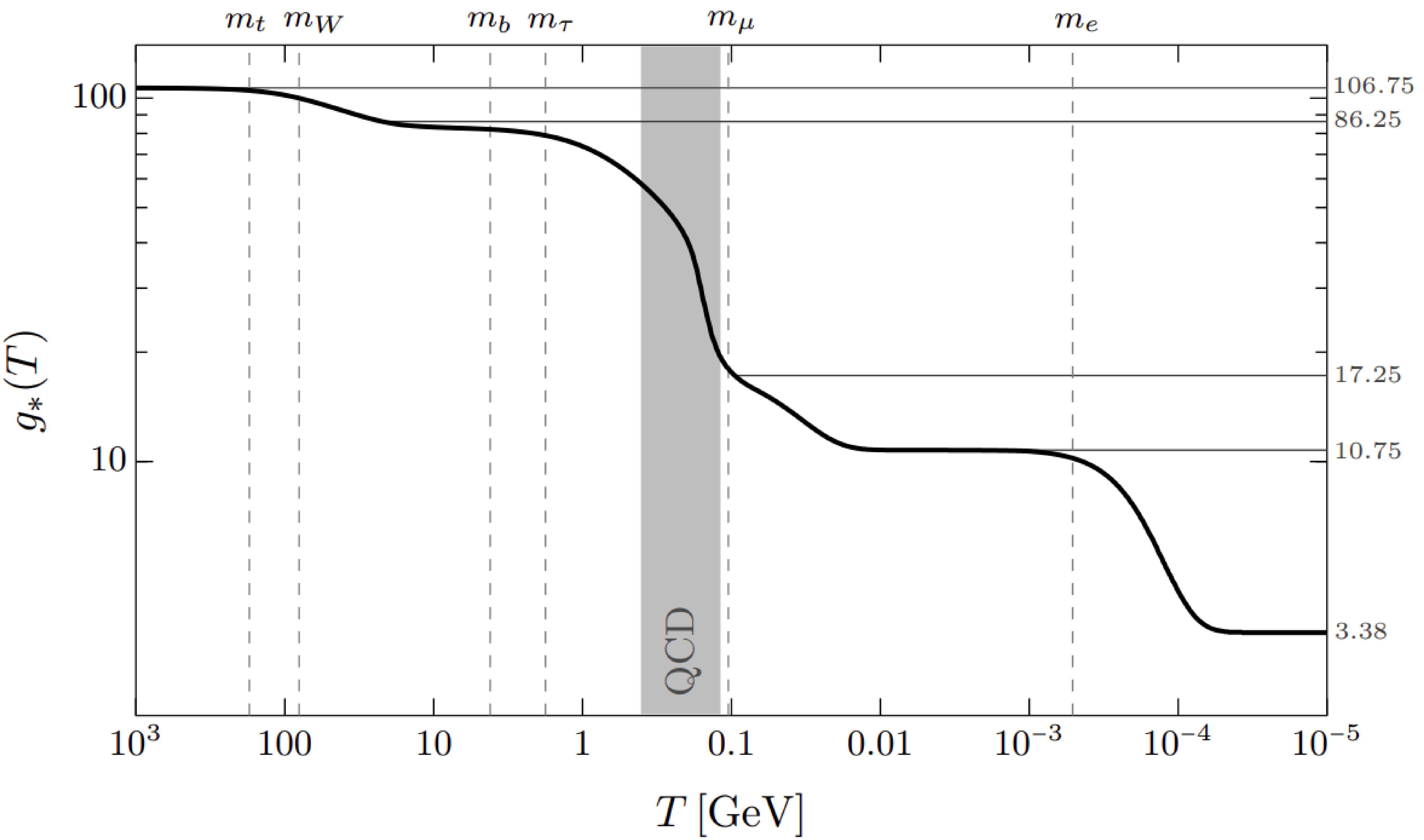
$$g_*(T) \equiv \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

Introdução à cosmologia fiducial

Table 3.2 Particle content of the Standard Model

Type		Mass	Spin	g
gauge bosons	γ	0		2
	$W^{\pm}$	80 GeV	1	3
	Z	91 GeV		
gluons	g_i	0	1	$8 \times 2 = 16$
Higgs boson	H	125 GeV	0	1
quarks	$t, \bar{t}$	173 GeV	$\frac{1}{2}$	$2 \times 3 \times 2 = 12$
	$b, \bar{b}$	4 GeV		
	$c, \bar{c}$	1 GeV		
	$s, \bar{s}$	100 MeV		
	$d, \bar{s}$	5 MeV		
	$u, \bar{u}$	2 MeV		
leptons	$\tau^{\pm}$	1777 MeV	$\frac{1}{2}$	$2 \times 2 = 4$
	$\mu^{\pm}$	106 MeV		
	$e^{\pm}$	511 keV		
	$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	< 0.6 eV	$\frac{1}{2}$	$2 \times 1 = 2$
	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	< 0.6 eV		
	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	< 0.6 eV		

Introdução à cosmologia fiducial



História térmica do universo e a recombinação

No surgimento da CMB os elétrons já haviam deixado de ser relativísticos a muito tempo, o que nos permite tomar aproximações.

Table 1.2 Key events in the history of the universe

Event	Temperature	Energy	Time
Inflation	$< 10^{29}$ K	$< 10^{16}$ GeV	$> 10^{-34}$ s
Dark matter decouples	?	?	?
Baryons form	?	?	?
EW phase transition	10^{15} K	100 GeV	10^{-11} s
Hadrons form	10^{12} K	150 MeV	10^{-5} s
Neutrinos decouple	10^{10} K	1 MeV	1 s
Nuclei form	10^{9} K	100 keV	200 s
Atoms form	3460 K	0.29 eV	290 000 yrs
Photons decouple	2970 K	0.25 eV	370 000 yrs
First stars	50 K	4 meV	100 million yrs
First galaxies	20 K	1.7 meV	1 billion yrs
Dark energy	3.8 K	0.33 meV	9 billion yrs
Einstein born	2.7 K	0.24 meV	13.8 billion yrs

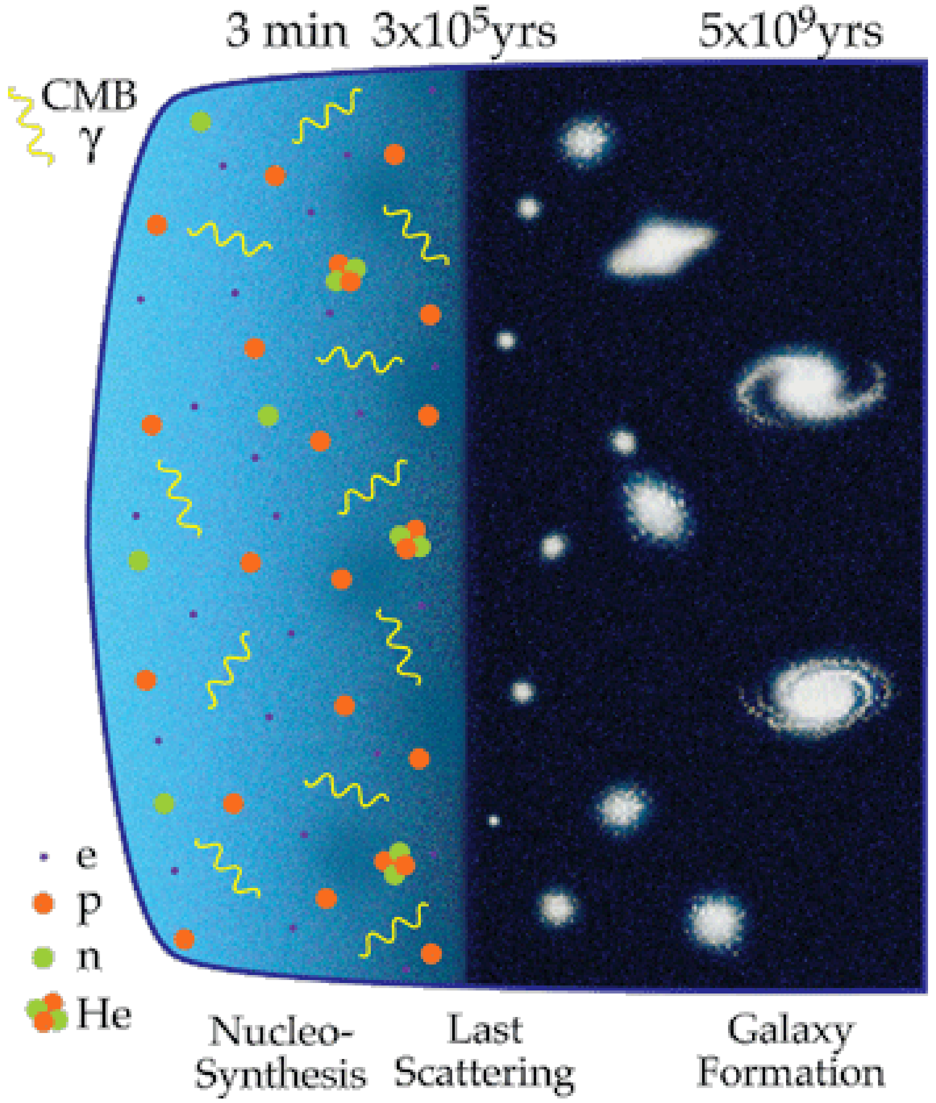
$$m_e \approx 0.511 \text{ MeV}$$

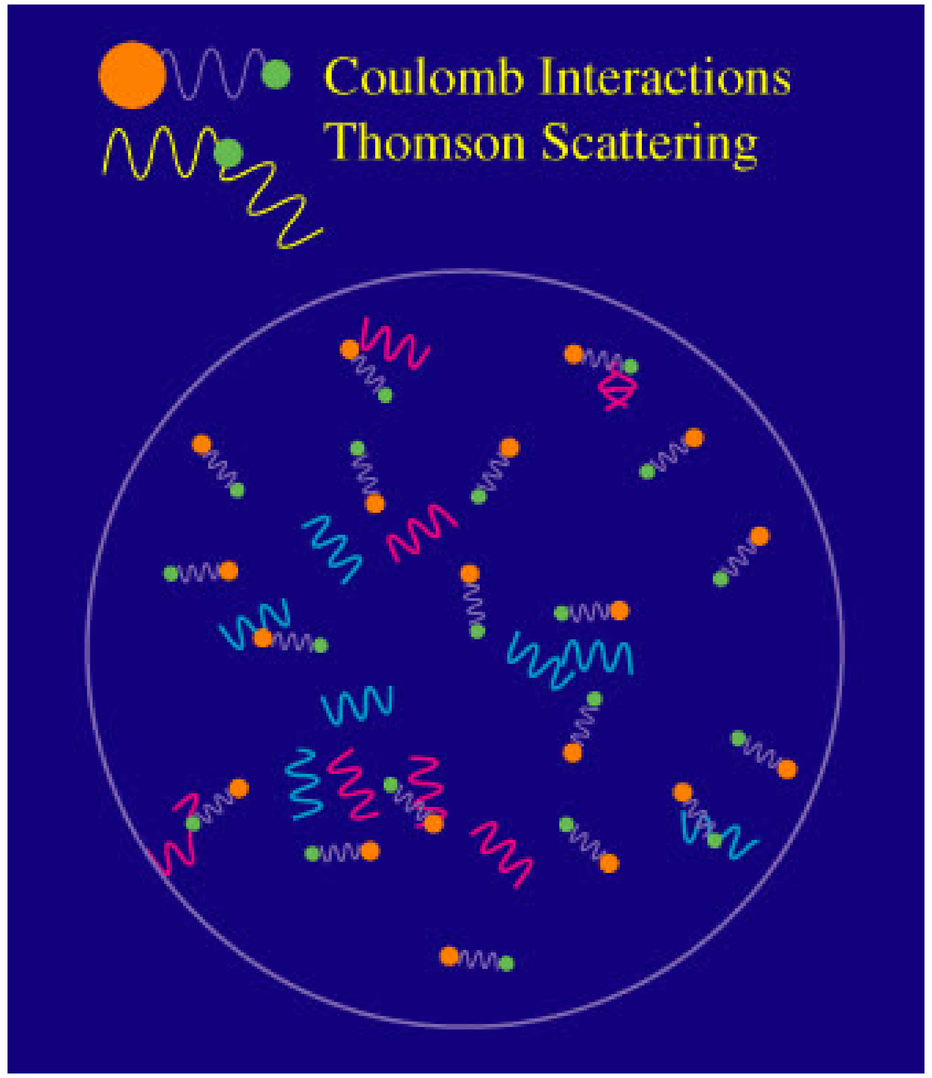
História térmica do universo e a recombinação

Table 3.1 Key events in the history of the early universe

Event	Time	Redshift	Temperature
Inflation	?	–	–
Baryogenesis	?	?	?
Dark matter freeze-out	?	?	?
EW phase transition	20 ps	10^{15}	100 GeV
QCD phase transition	20 μs	10^{12}	150 MeV
Neutrino decoupling	1 s	6×10^{9}	1 MeV
Electron–positron annihilation	6 s	2×10^{9}	500 keV
Big Bang nucleosynthesis	3 min	4×10^{8}	100 keV
Matter–radiation equality	50 kyr	3400	0.80 eV
Recombination	290–370 kyr	1090–1270	0.25–0.29 eV
Photon decoupling	370 kyr	1090	0.25 eV

Efeitos do espalhamento Compton na CMB





Efeitos do espalhamento Compton na CMB

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} e^{-(E_1+E_2)/T}$$
$$\times (2\pi)^4 \delta_{\rm D}^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta_{\rm D}^{(1)}(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2$$

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}$$

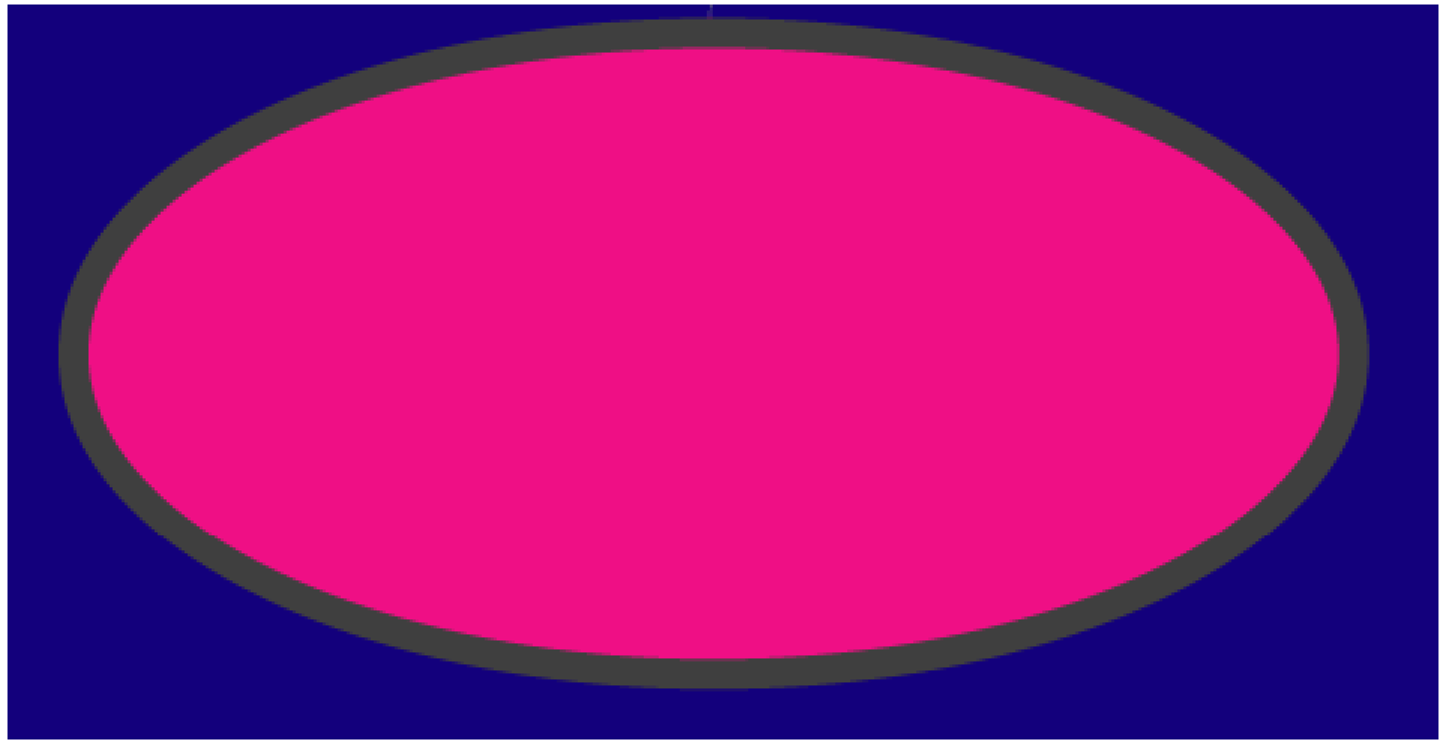
$$e^- + p \leftrightarrow \mathrm{H} + \gamma$$

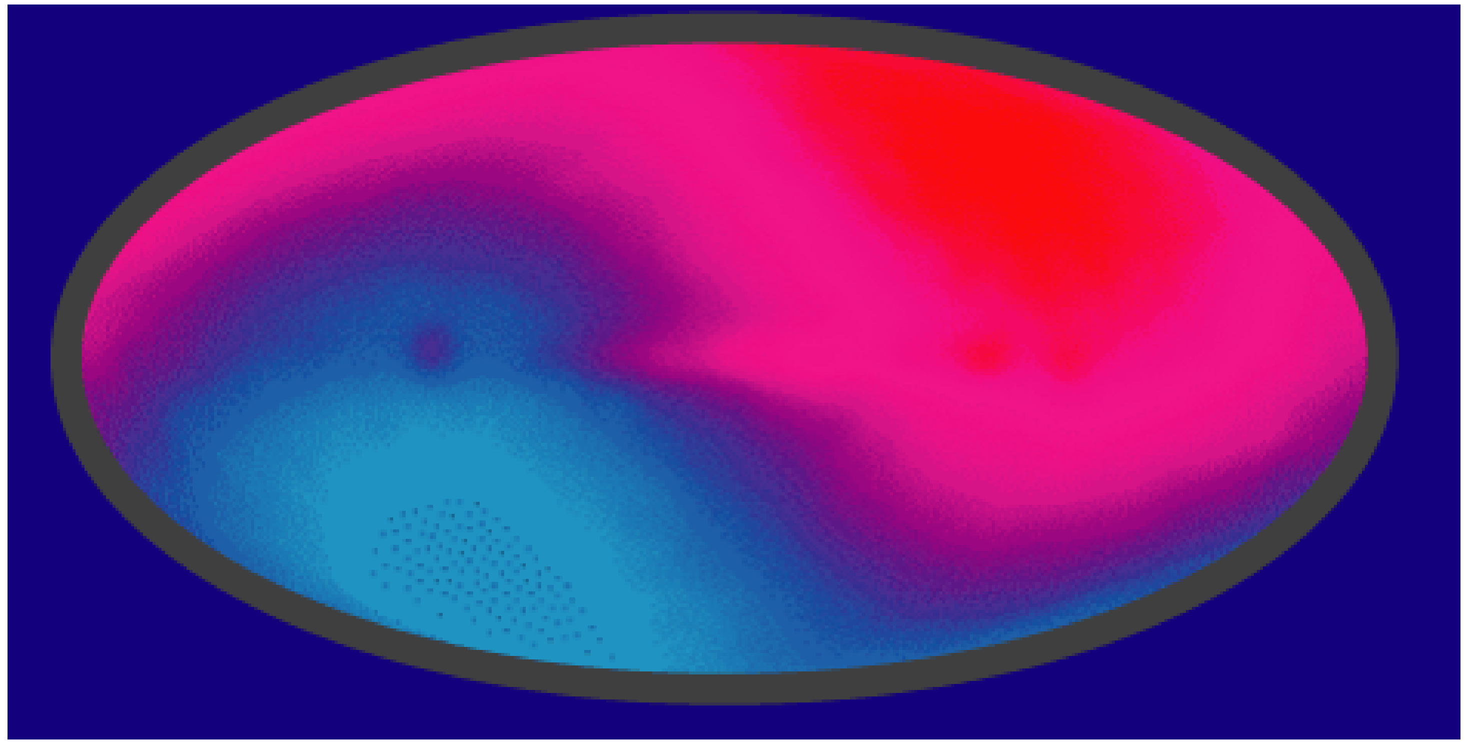
$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_{\rm H}} = \frac{n_p}{n_p + n_{\rm H}}$$

$$a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_{\rm H}}{n_{\rm H}^{(0)}} - \frac{n_e^2}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right\}$$
$$= n_{\rm b} \langle \sigma v \rangle \left\{ (1 - X_e) \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T} - X_e^2 n_{\rm b} \right\}$$

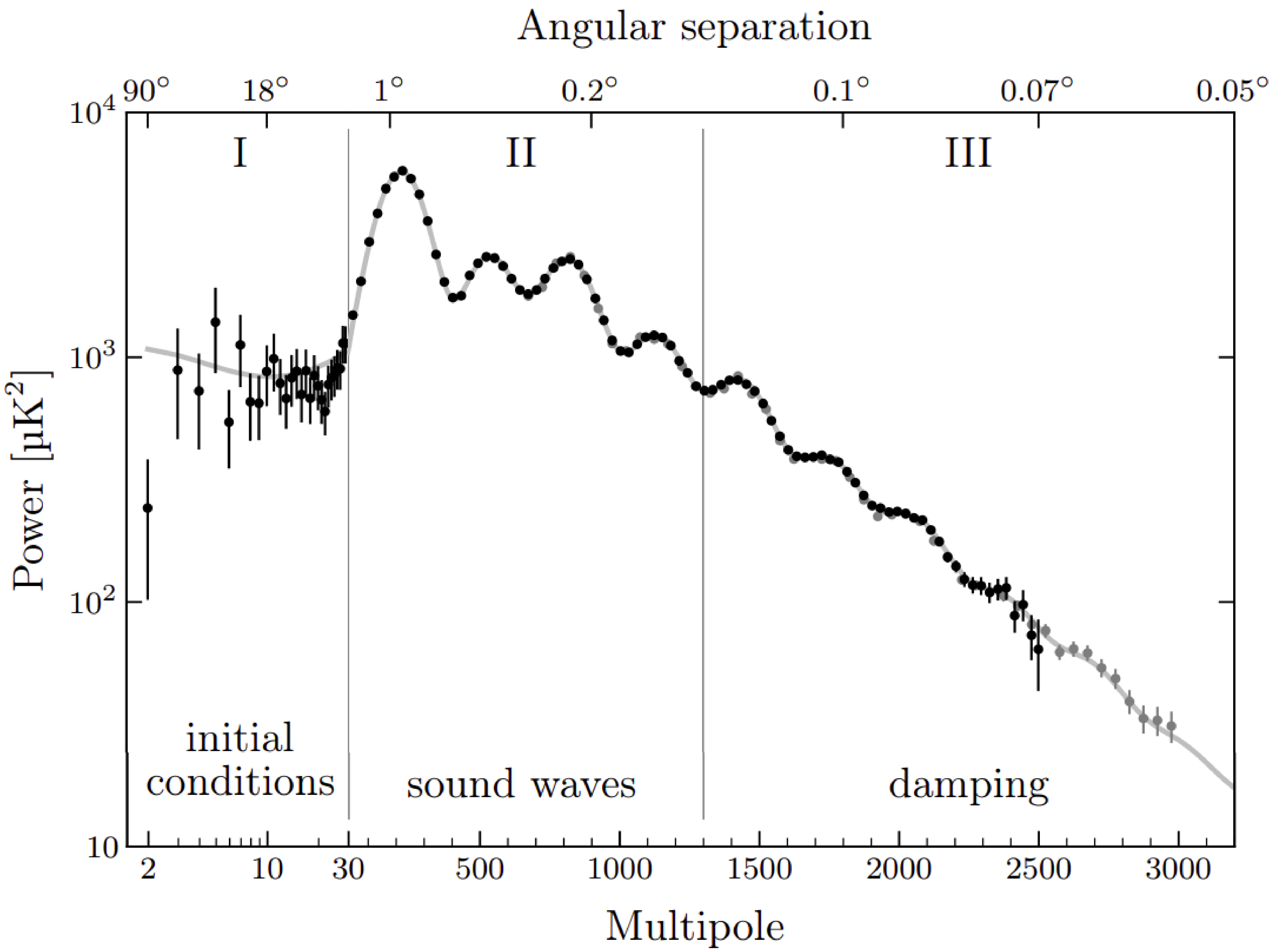
Efeitos do espalhamento Compton na CMB

Os termos de monopolo e de dipolo devem ser subitraídos da CMB para obtermos o mapa das anisotropias na temperatura. O termo de dipolo surge devido ao movimento do sistema solar.

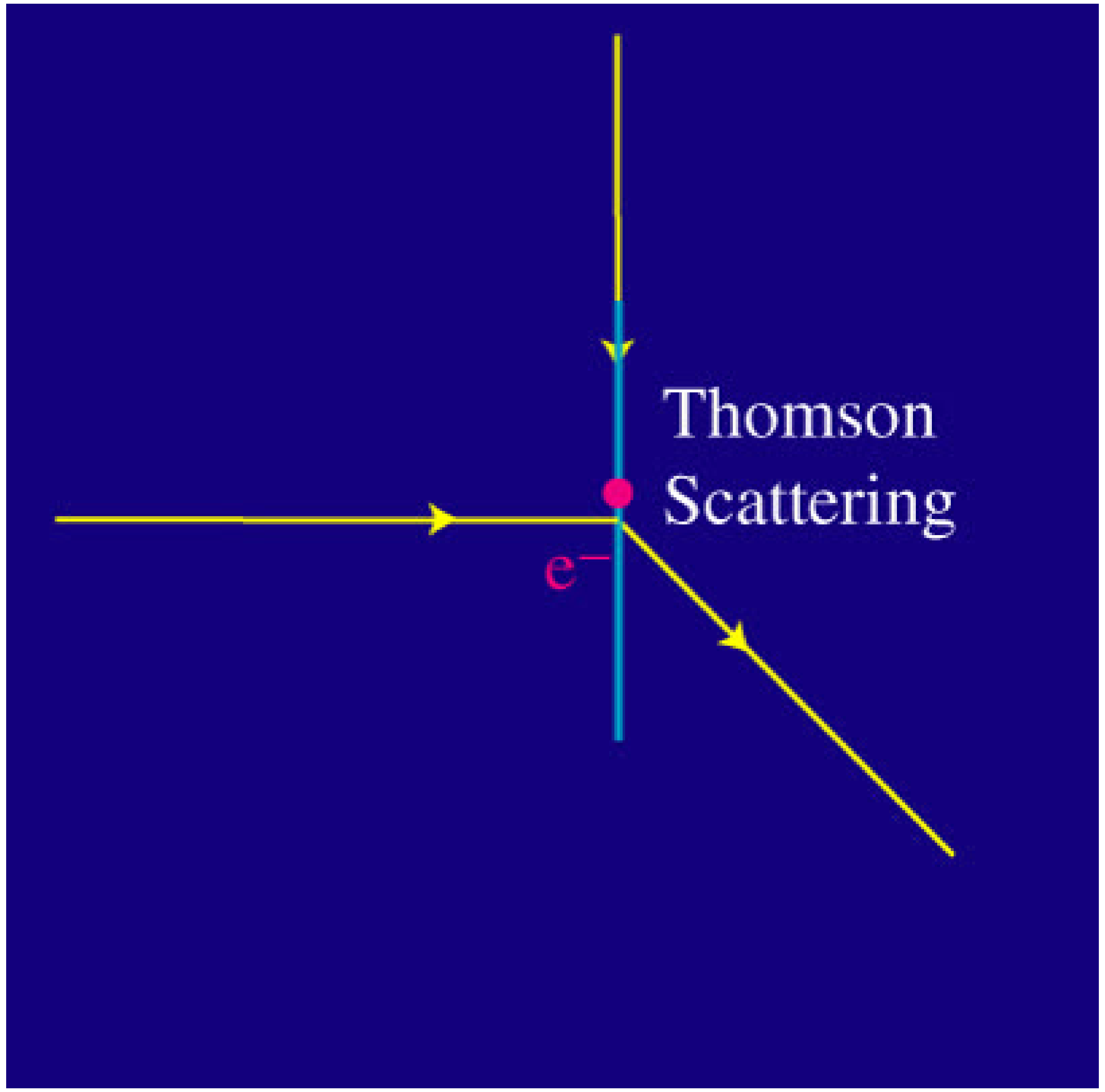


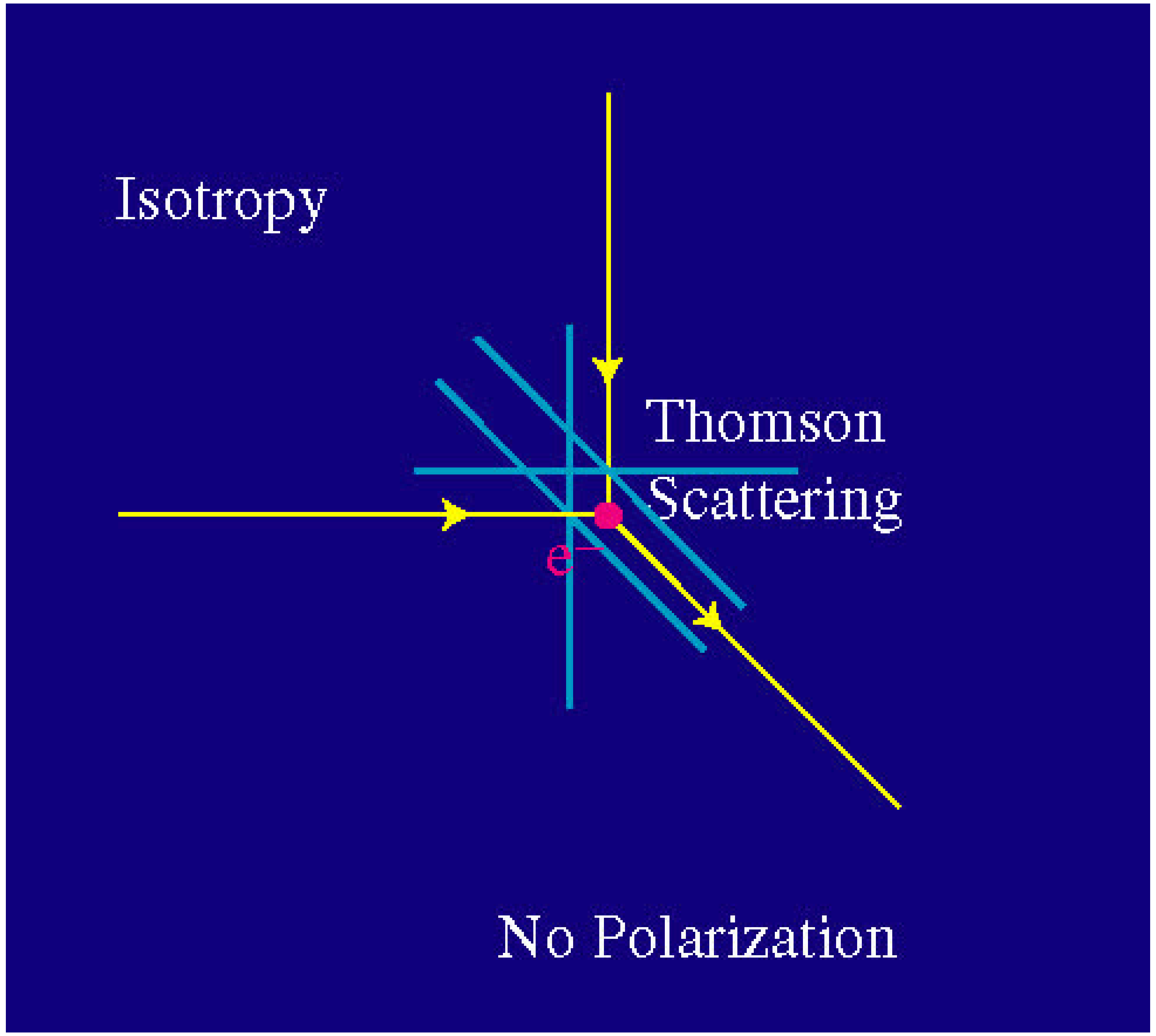


Efeitos do espalhamento Compton na CMB

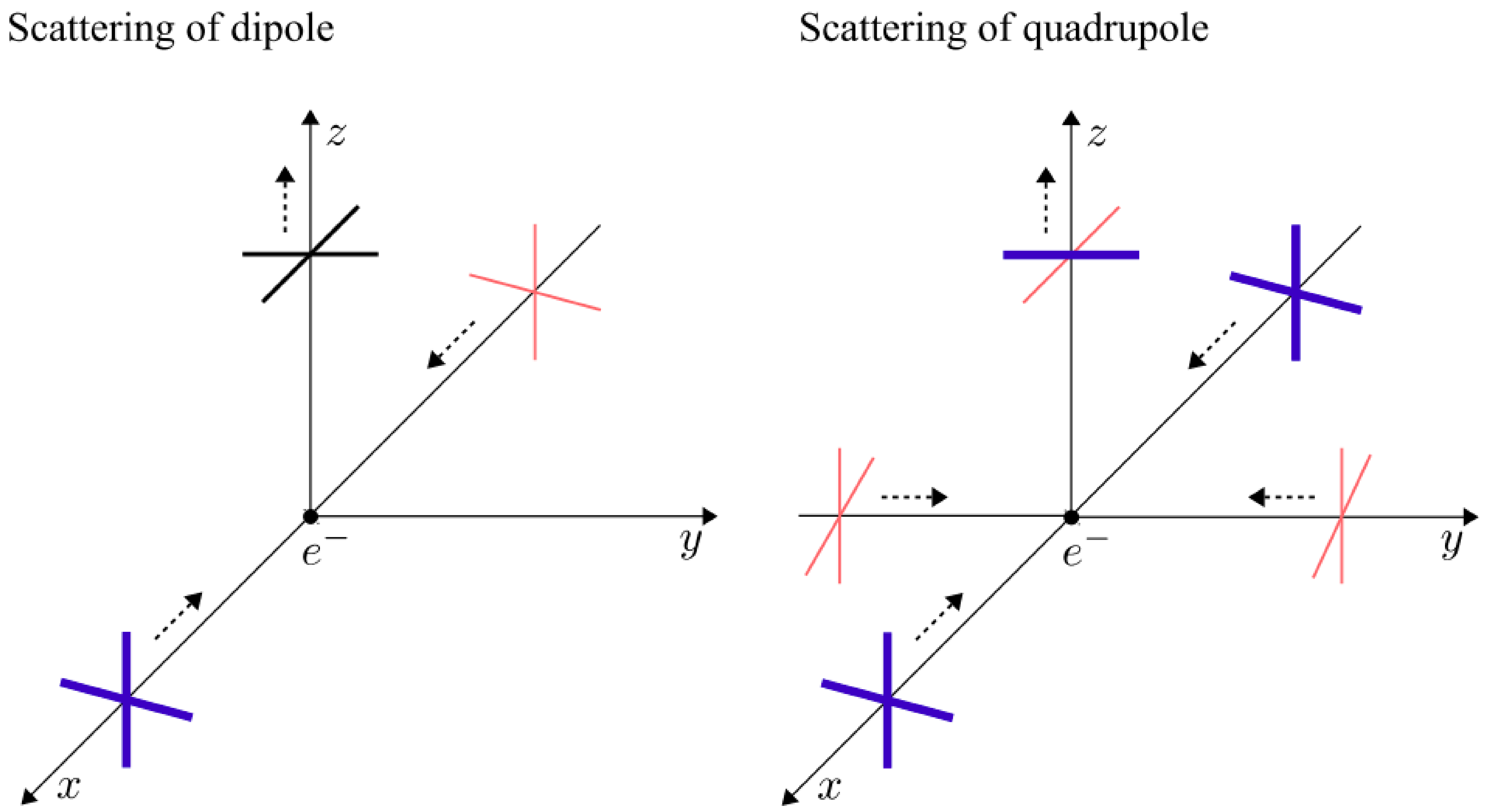


Polarização

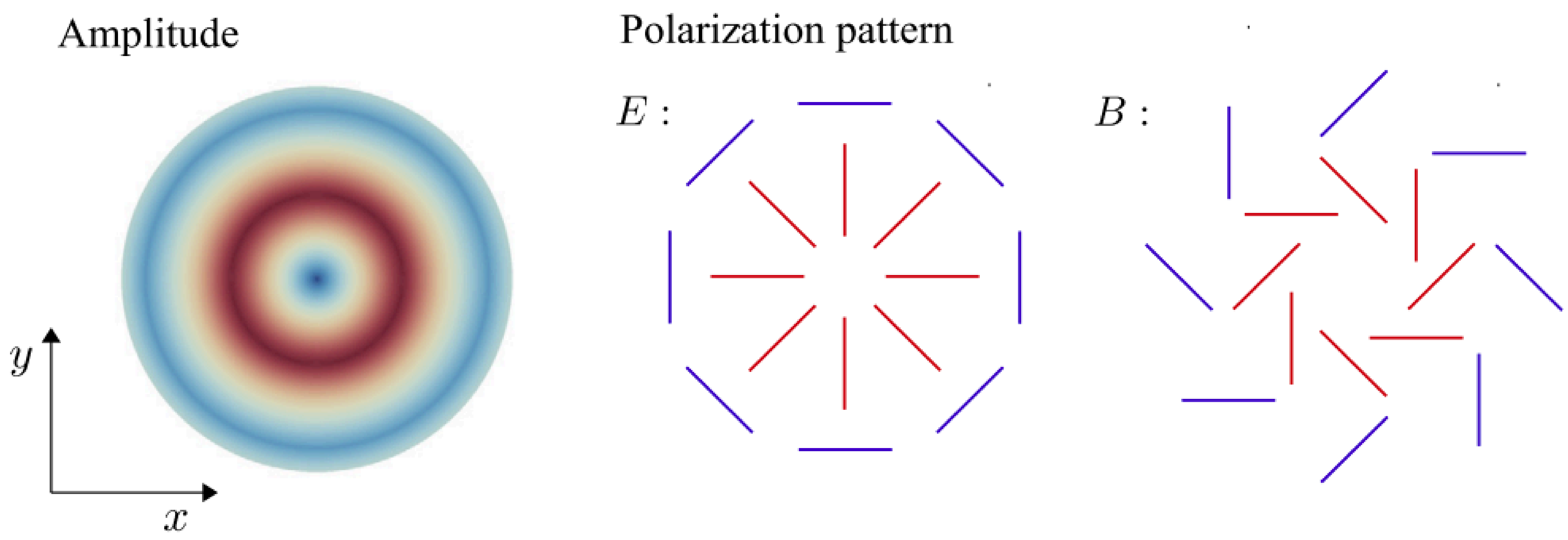




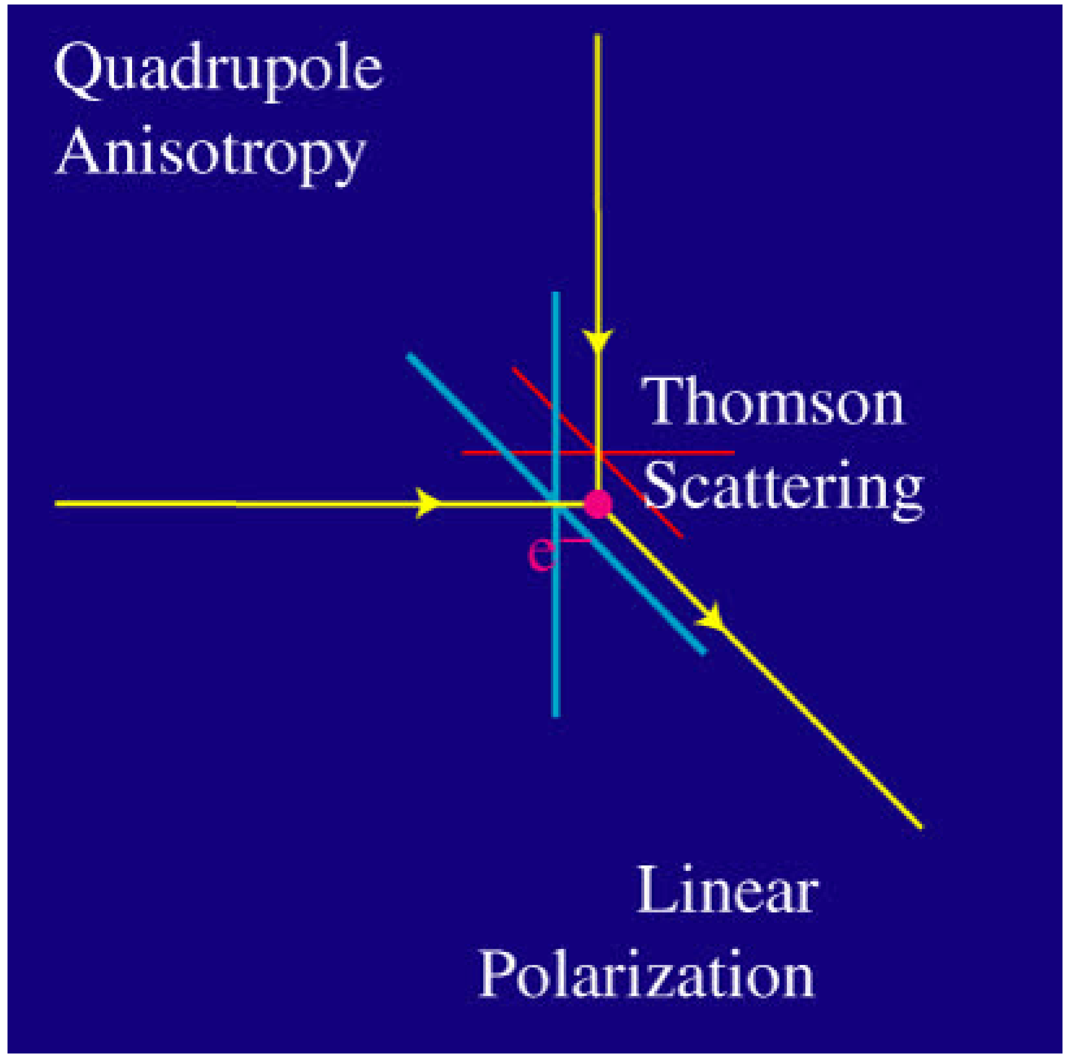
Polarização

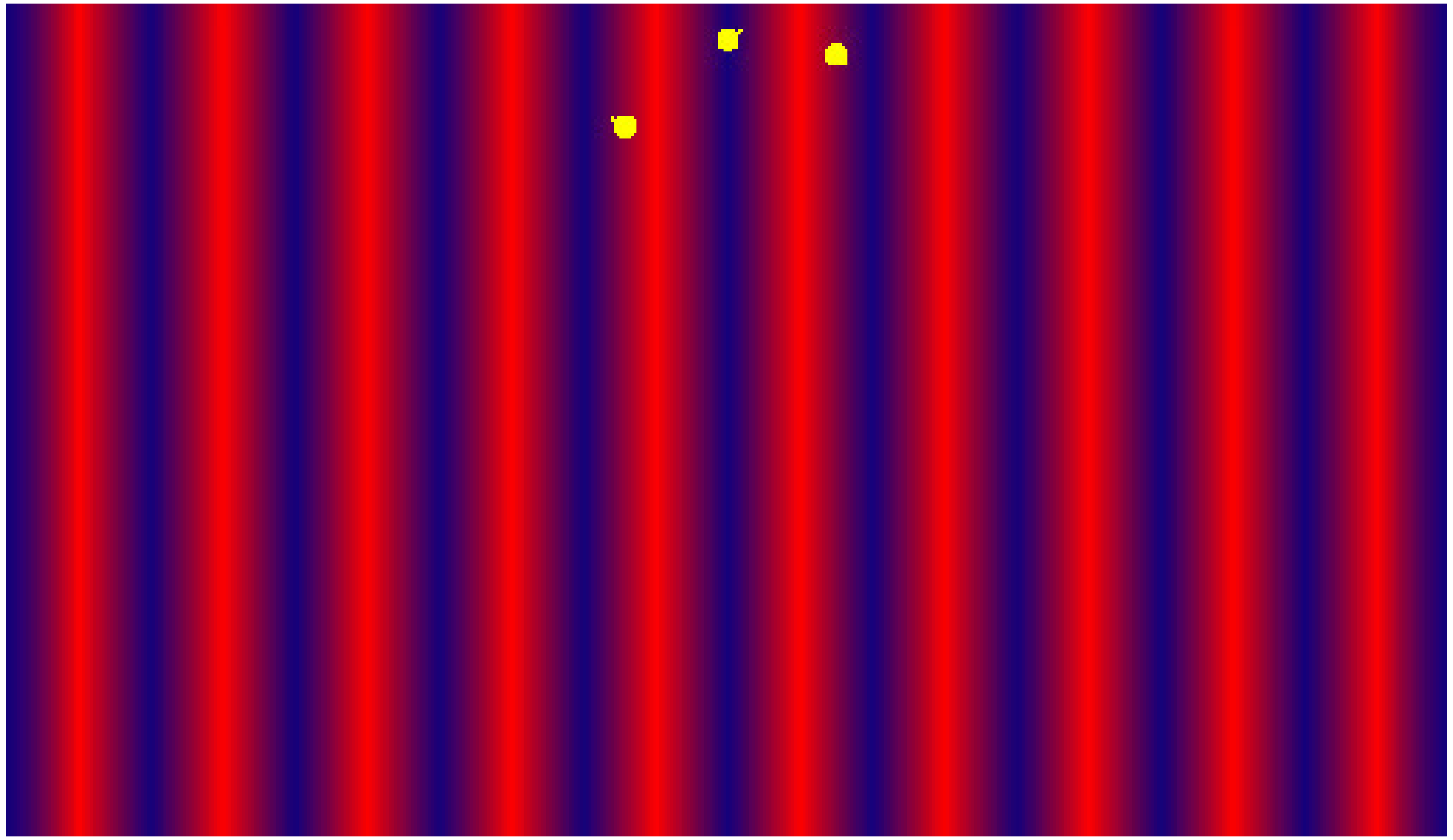


Polarização

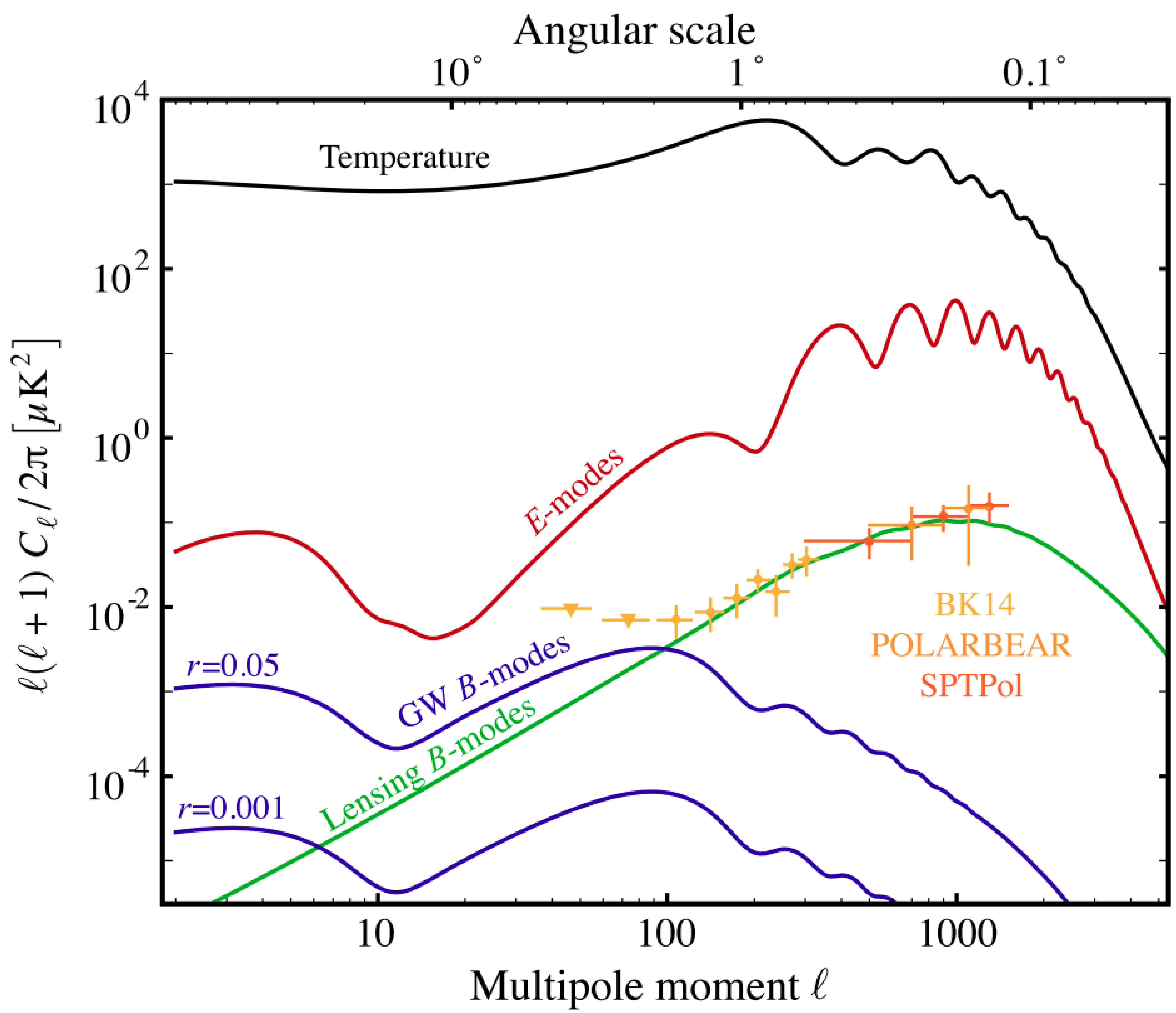


Polarização

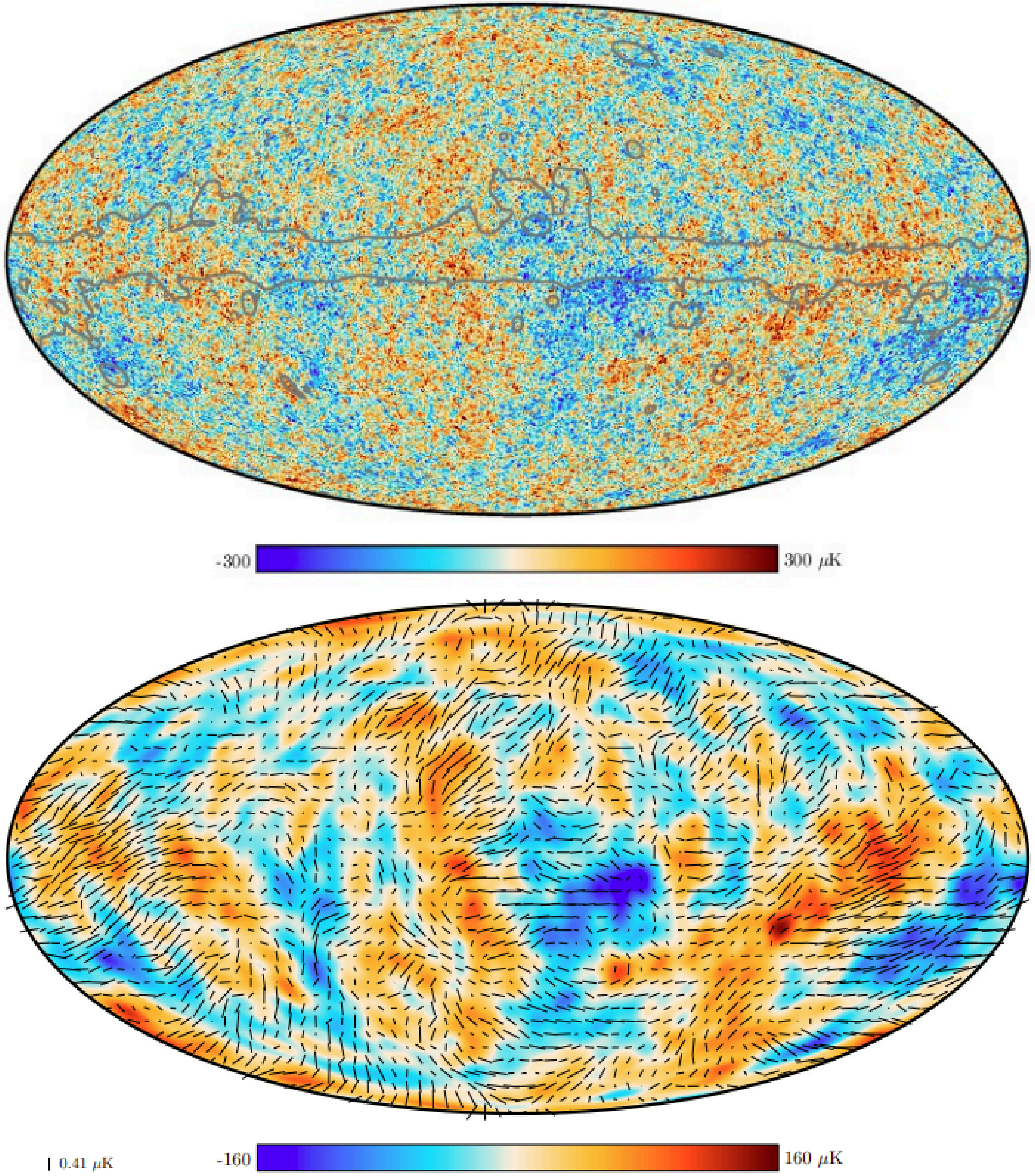




Polarização



Efeitos do espalhamento Compton na CMB



Conclusão

- Conseguimos reproduzir o espalhamento Compton clássico usando as ferramentas da QFT;
- Esse processo físico se mostrou essência para entender a física do universo primordial e a formação da radiação cósmica de fundo, sendo suas principais assinaturas a escala de oscilações acústicas bariônicas (BAO), a dominância de E-modes no power spectrum e o damping devido à reionização (espalhamento Compton inverso).

Referências

[1] **An Introduction to Quantum Field Theory**. M. Peskin, and D. Schroeder. Westview Press (1995);

[2] **Quantum Field Theory and the Standard Model**. M.D. Schwartz. Cambridge University Press (2014);

[3] **Lecture Notes - Quantum Field Theory I**. R. D. Matheus;

[4] **Modern Cosmology - 2nd edition**. S. Dodelson and F. Schmidt. Elsevier Press, Cambridge (2020);

[5] **Cosmology**. Baumann, D. Cambridge University Press (2022);

[6] Planck Collaboration; N. Aghanim, Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown, et al. **Planck 2018 results: I. Overview and the cosmological legacy of Planck**. Astronomy & Astrophysics, vol. 641 (2020). doi:10.1051/0004-6361/201833880;

[7] **Wayne Hu's Tutorials**, https://background.uchicago.edu/~whu/intermediate/summary.html. Acesso em 06/12/2025;

[8] **Physics of the Cosmic Microwave Background**. Emmanuel Schaan (SLAC National Accelerator Laboratory, USA) - V Joint ICTP-Trieste/ICTP-SAIFR School on Cosmology.

Referências

[9] The Klein–Nishina formula, https://scipython.com/blog/the-kleinnishina-formula/. Acesso em 10/12/2025.