INFLAÇÃO

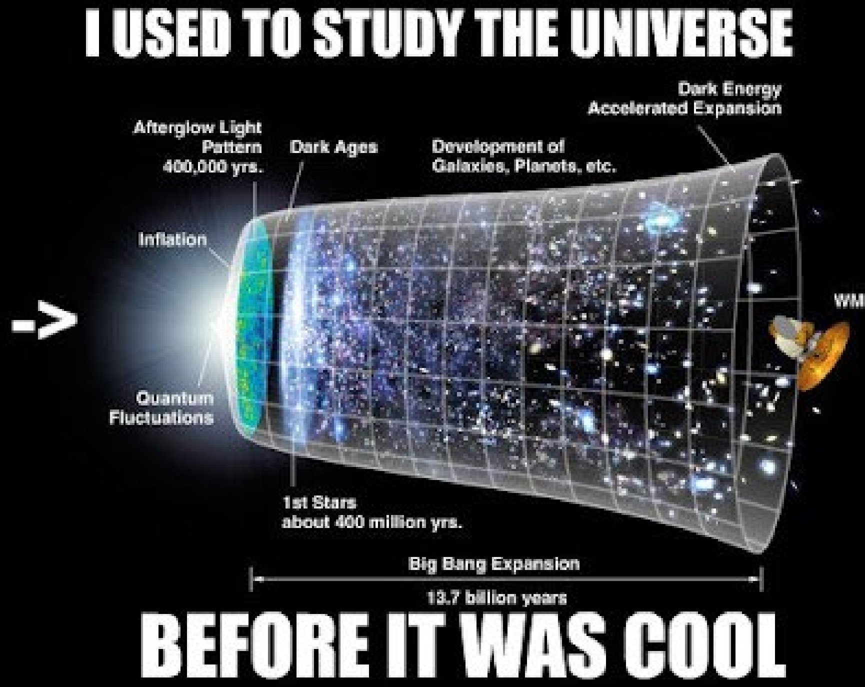
FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS PRIMORDIAIS GERAM A ESTURA EM LARGA-ESCALA

KAYNAN R. DE O. POMPEU

SEMINÁRIO: QFT - 1 IFT – UNESP

Sumário

1. Cosmologia para apressados
2. Motivações para a Inflação
    1. Prévia
    2. Os problemas do horizonte e da planitude
    3. Como a inflação resolve esses problemas
3. Um campo escalar que varia lentament
4. Perturbações cosmológicas
5. Quantização



Fonte: quickmeme.com

1. Cosmologia para apressados

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

O universo é Homogêneo e Isotrópico em largas escalas (~150 Mpc)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

O universo está em expansão. (Hubble, 1929)

O universo é espacialmente plano. ($k \approx 0$)

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

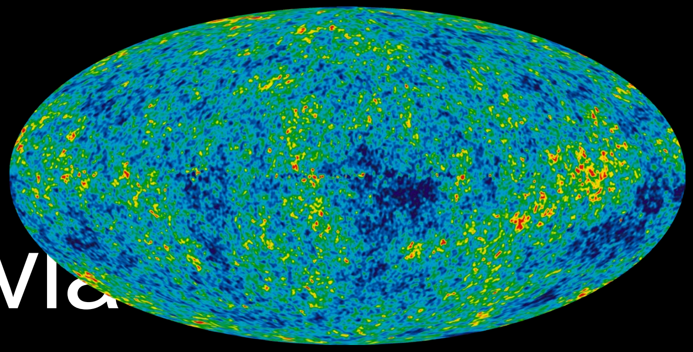
$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$

1. Cosmologia para apressados

Event	**Temperature (T)**	**Redshift (z)**	**Time (t)**
End of Inflation	$\sim 10^{16}$ GeV	$\sim 10^{29}$	$\sim 10^{-36}$ s
Electroweak Transition	~ 100 GeV	$\sim 10^{15}$	$\sim 10^{-11}$ s
Quark-Hadron Transition	~ 150 MeV	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{-5}$ s
Big Bang Nucleosynthesis (BBN)	~ 1 MeV – 0.1 MeV	$\sim 10^{9}$	~ 1 s – 3 min
Matter-Radiation Equality	~ 0.75 eV	~ 3400	$\sim 60,000$ yrs
Recombination (CMB)	~ 0.25 eV	~ 1100	$\sim 380,000$ yrs
Matter-Λ Equality	$\sim 2.3 \times 10^{-4}$ eV	~ 0.3	~ 9.8 Gyr
Today	$\sim 2.3 \times 10^{-4}$ eV	0	~ 13.8 Gyr

Fonte: Baumann, 2022

Uma fotografia do universo com apenas 370000 anos ☞

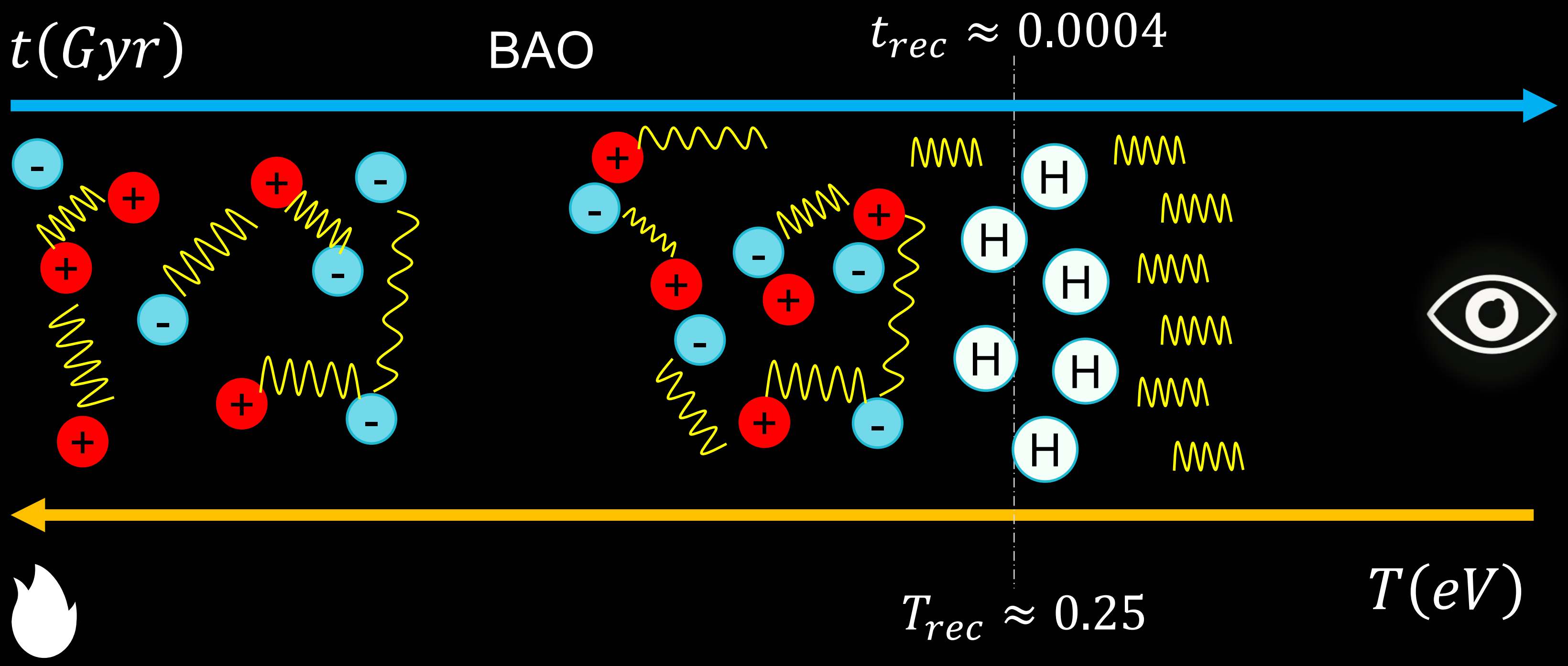


2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

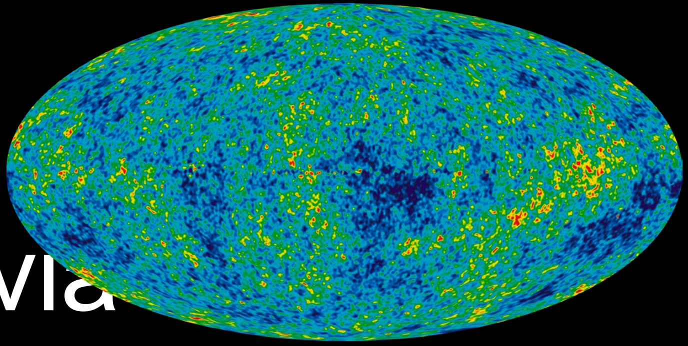
Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble



Recombinação

Uma fotografia do universo com apenas 370000 anos ☞

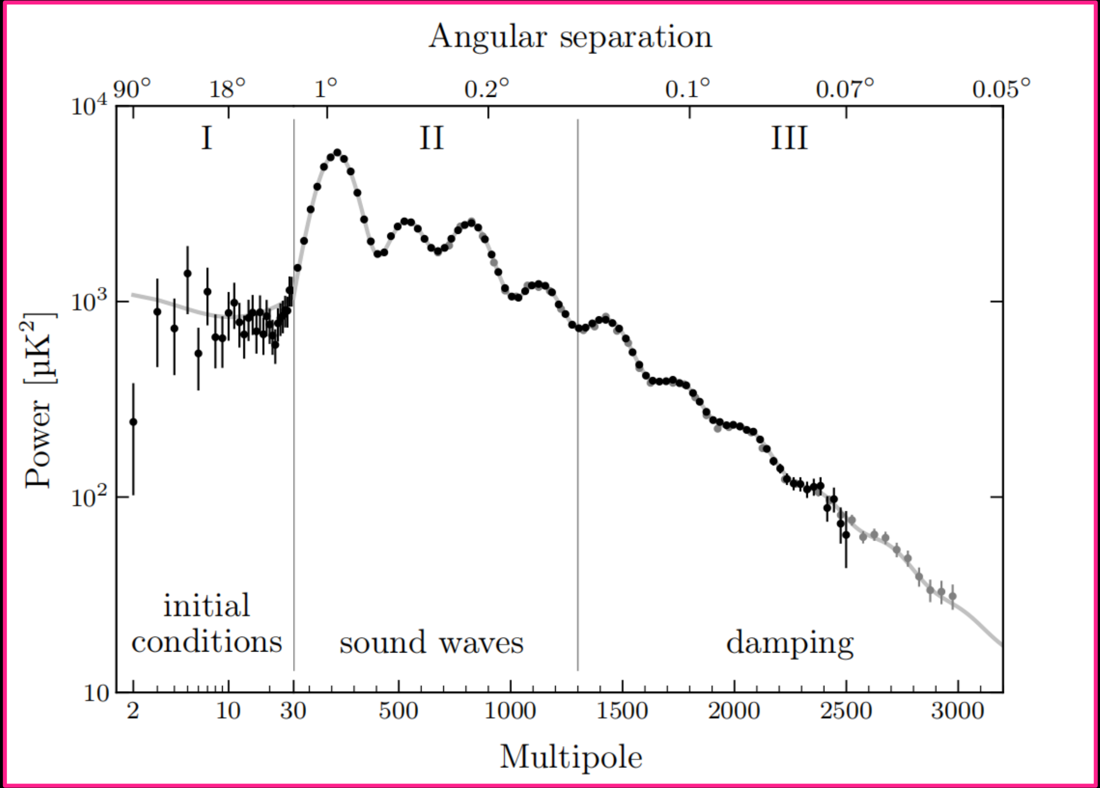


2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble

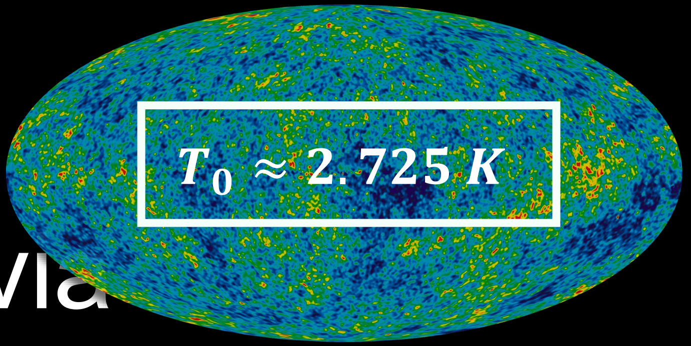


Fonte: Baumann, 2022

As flutuações de temperatura da CMB são analisadas estatisticamente medindo-se as *correlações* entre pontos quentes e frios em função de sua separação angular.

Os modos de Fourier das flutuações primordiais possuem a mesma fase.

$$\Theta(\hat{n}) = \frac{\delta T(\hat{n})}{T_0}$$



2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble

Função de correlação de dois pontos:

$$C(\theta) = \langle \Theta(\hat{n})\Theta(\hat{n}') \rangle$$

Expansão em esféricos harmônicos:

$$\Theta(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n})$$

Expansão sobre o espectro de potências:

$$C(\theta) = \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l\big(\cos(\theta)\big)$$

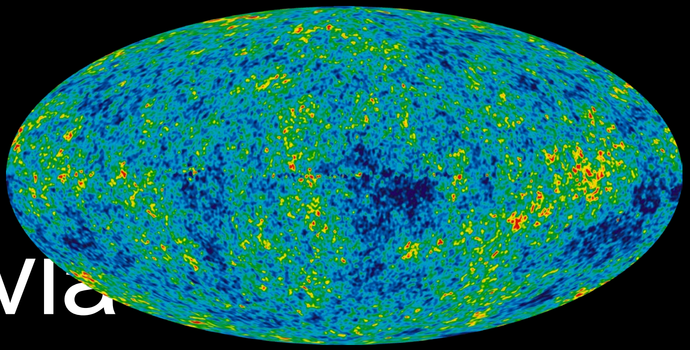
$$C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle$$

$$C_l = \int_{-1}^{1} d(\cos(\theta)) C(\theta) P_l(\cos(\theta))$$

Existe uma importante relação entre o espectro das perturbações primordiais de curvatura e o espectro angular de potências das anisotropias da CMB!

Coming soon

Homogênea e isotrópica em uma parte em 10^5



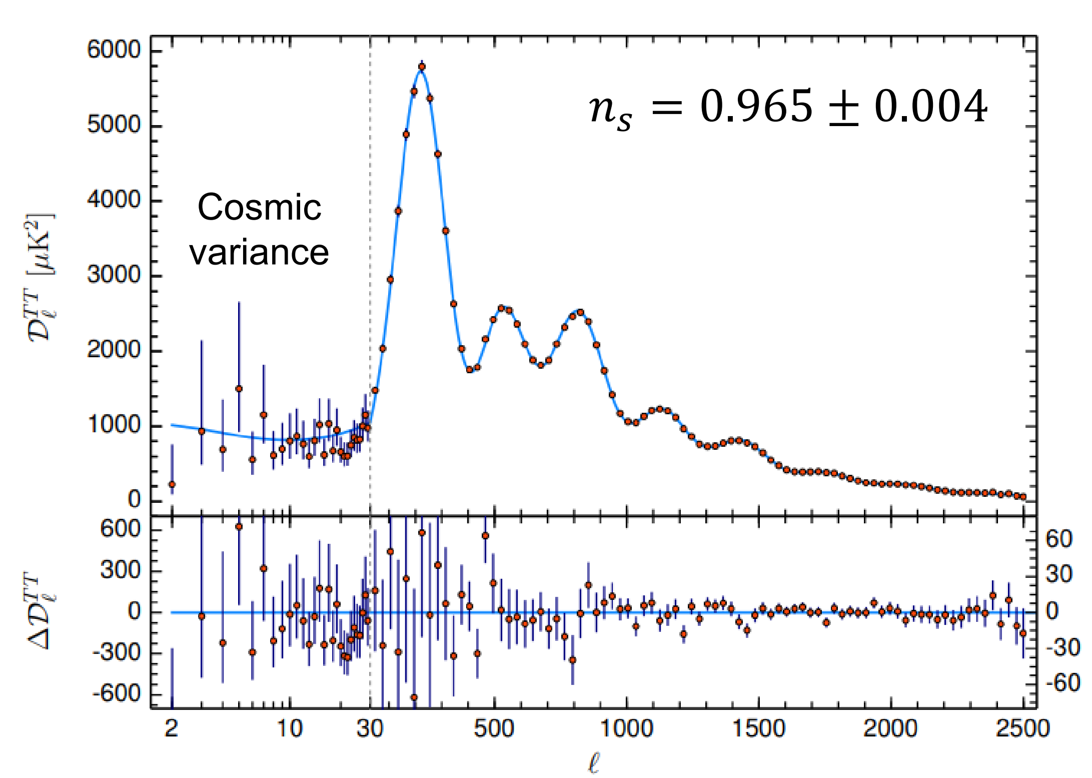
2. Motivações para a inflação: prévia

Fonte: Adaptado de Planck

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble



A concordância é extraordinária.

Mudando a base:

$$C_l = 4\pi \int d(\ln k)\Theta_l^2(k)\Delta^2(\mathrm{k})$$

Esse fitting é feito utilizando-se o ansatz:

$$\Delta^2(k) = A_s\left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1}$$

Quase invariante de escala!

2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble

Definimos o tempo conforme η, de forma que os cones de luz na métrica cosmológica sejam linhas retas:

$$d\eta = \frac{dt}{a}$$

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right)$$

Um evento qualquer só pode ter sido influenciado por eventos que estão dentro do horizonte de partículas.

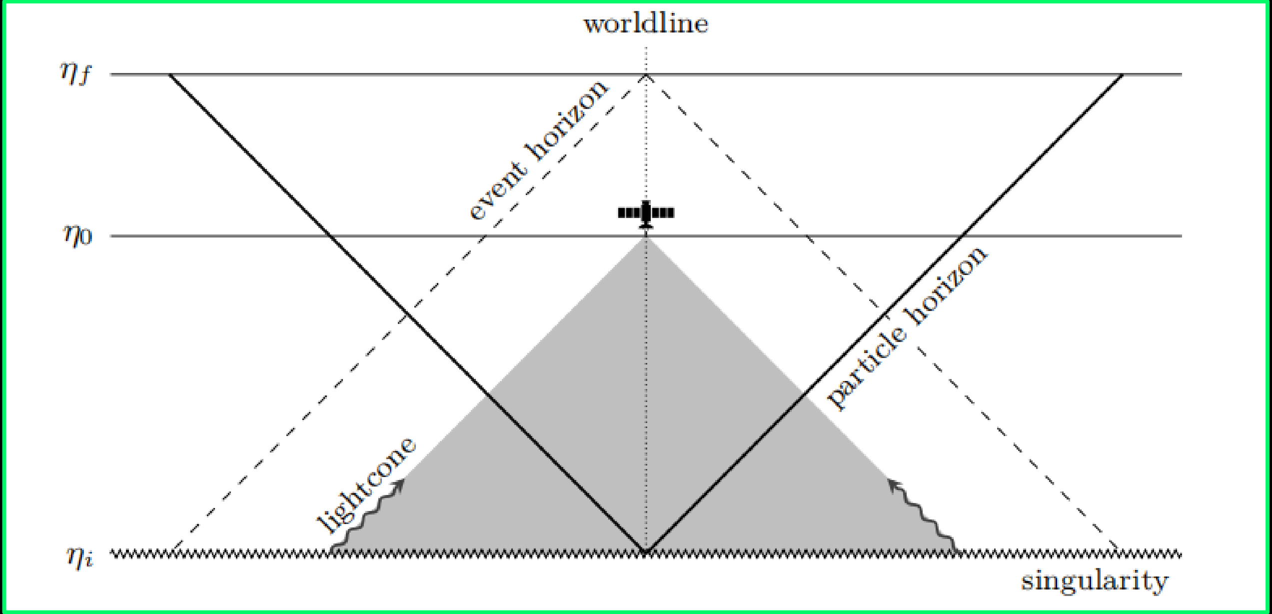
2. Motivações para a inflação: prévia

Fonte: Baumann, 2022

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble



$$\chi_p = \eta_0 - \eta_i = \int \frac{dt}{a(t)}$$

Se o universo for dominado por radiação: $a \propto t^{1/2} \propto \eta$

$$\chi_p = \eta_0 - \eta_i \propto t^{1/2}$$

$$d_p = 2t$$

O horizonte de partículas decresce no passado.

No passado as superfícies causalmente conectadas eram menores!

$$d_p = a(t)\chi_p = a(t)\int \frac{dt'}{a(t')}$$

Horizonte físico, ou próprio

2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble

Em um universo em expansão:
Distância física = (fator de escala) x (distância comóvel)

$$v = Hr$$

$$R_H = \frac{c}{H}$$

Existe então uma superfície R_H tal que a velocidade de recessão é igual à da luz.

Tomando $c = 1$ e escrevendo em termos de coordenadas comoveis ($R_H = ar_H$)

$$r_H = \frac{1}{aH}$$

2. Motivações para a inflação: prévia

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble

Ele mede o tamanho *comóvel* da região que está causalmente conectada *em uma escala de Hubble*.

Em um universo dominado por radiação:

$$r_H \propto t^{1/2} \propto \eta$$

Os modos de Fourier (k) de perturbações lineares, $\delta_i(k,t)$, possuem comprimentos de onda que evoluem como:

$$\lambda_k(t) = a(t) \times \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda_k(t) \propto t^{1/2}$$

Flutuações evoluem diferente dentro e fora do horizonte.

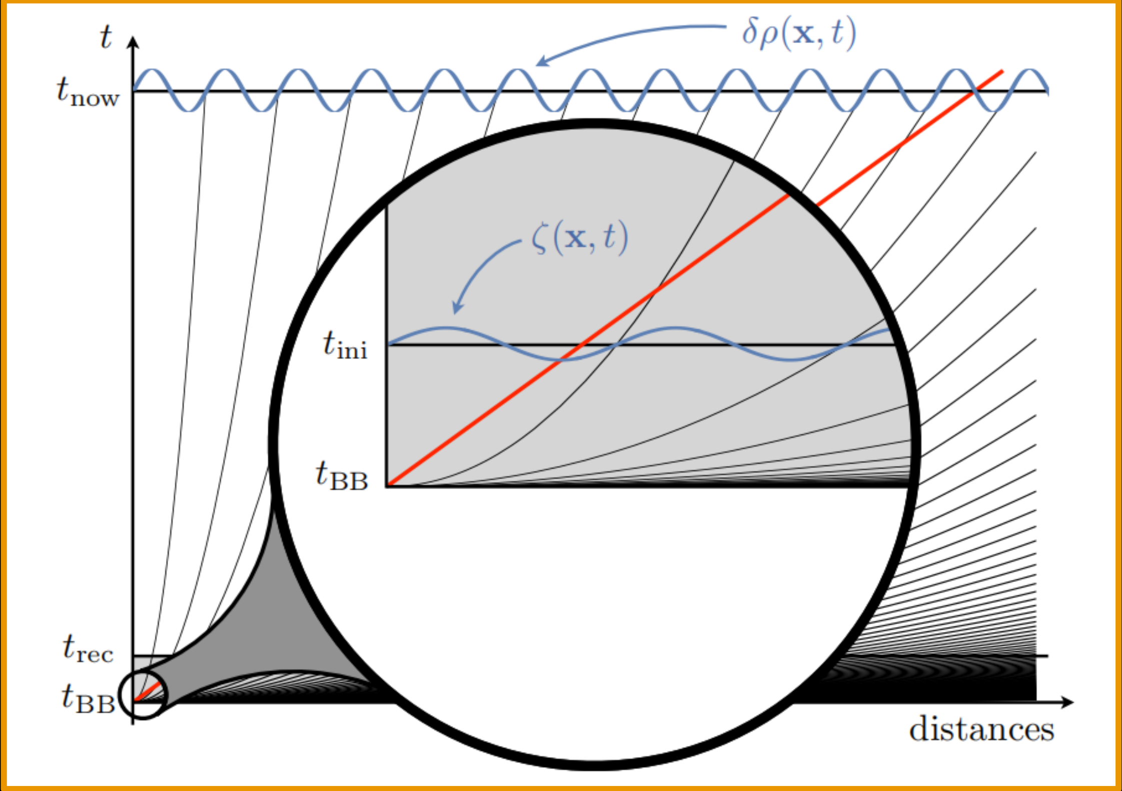
2. Motivações para a inflação: prévia

Fonte: Palma, 2008

CMB

Horizonte de partículas

Horizonte de Hubble



Todas as inomogeneidade observadas existiram fora do horizonte imediatamente após a singularidade!

A CMB mostra anisotropias com correlações em escalas angulares **maiores do que o horizonte no instante de desacoplamento**.

2. Motivações para a inflação: prévia

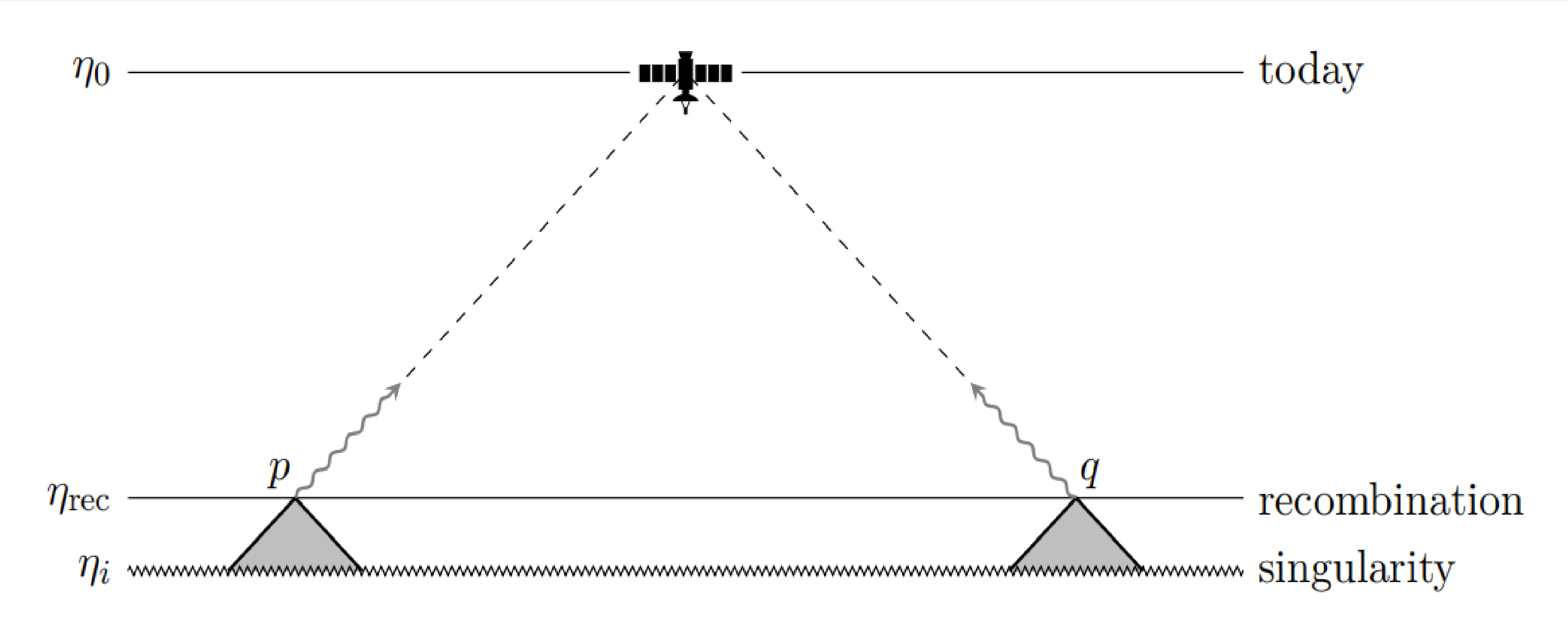
CMB	O Universo jovem era extremamente homogêneo e isotrópico *ao longo de grandes escalas*, apresentando pequenas flutuações primordiais.
Horizonte de partículas	Estabelece qual a distância máxima sobre a qual um evento do passado poderia influenciar um outro no futuro. Aumenta com o tempo, era *menor* no passado.
Horizonte de Hubble	Perturbações separadas por distâncias maiores que $(aH)^{-1}$ não podem se influenciar localmente, somente após entrarem no horizonte.

2. Motivações para a inflação: o problema do horizonte

A luz emitida pela CMB é extremamente homogênea e isotrópica ao longo de áreas que nunca estiveram causalmente conectadas. Como?

$$\eta = \int \frac{d(\ln a')}{a' H}$$

$$d_h^{rec} \approx 265\ Mpc$$



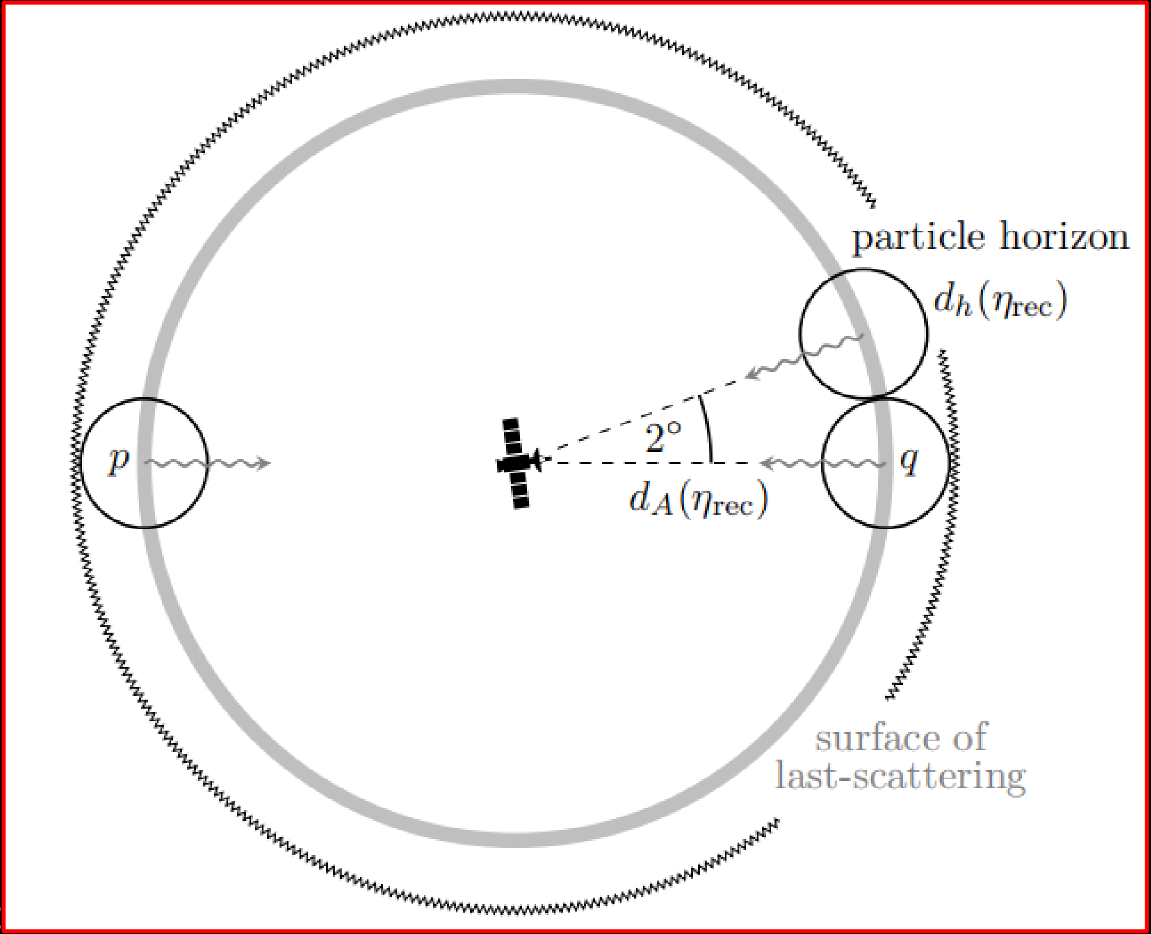
Fonte: Baumann, 2022

É possível demonstrar que isso corresponde a um ângulo subentendido de 2° no céu!

Existem perturbações que entram no horizonte antes da recombinação que estiveram fora do horizonte próximo da singularidade.

Como é possível que haja correlações entre as anisotropias da CMB em escalas não causais?

2. Motivações para a inflação: o problema do horizonte



Fonte: Baumann, 202

Existe um total de 40000 "pedaços" do céu causalmente desconectados na CMB

E existem correlações entre as flutuações em escalas maiores que a compreendida pelo horizonte na época da recombinação.

Além disso a temperatura média é a mesma ao longo de todo o céu.

Qual a origem dessas correlações?

2. Motivações para a inflação: o problema da planitude

Quais condições iniciais o universo deveria ter para reproduzir o que é observado hoje?

O que determina o quão plano é o universo é a sua distribuição de matéria/energia.

Podemos escrever as equações de Friedmann como:

$$1 = \Omega(t) + \frac{k}{(aH)^2}$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho$$

Pior:

Exige um altíssimo "fine-tuning" nas condições iniciais, ao longo de regiões causalmente desconectadas!

$$|\Omega_{\mathrm{k}}^{BBN}| < 10^{-16}$$
$$|\Omega_{\mathrm{k}}^{EW}| < 10^{-29}$$

Exige um altíssimo "fine-tuning" nas condições iniciais.

Mas $(aH)^{-1}$ tende a diminuir no passado.

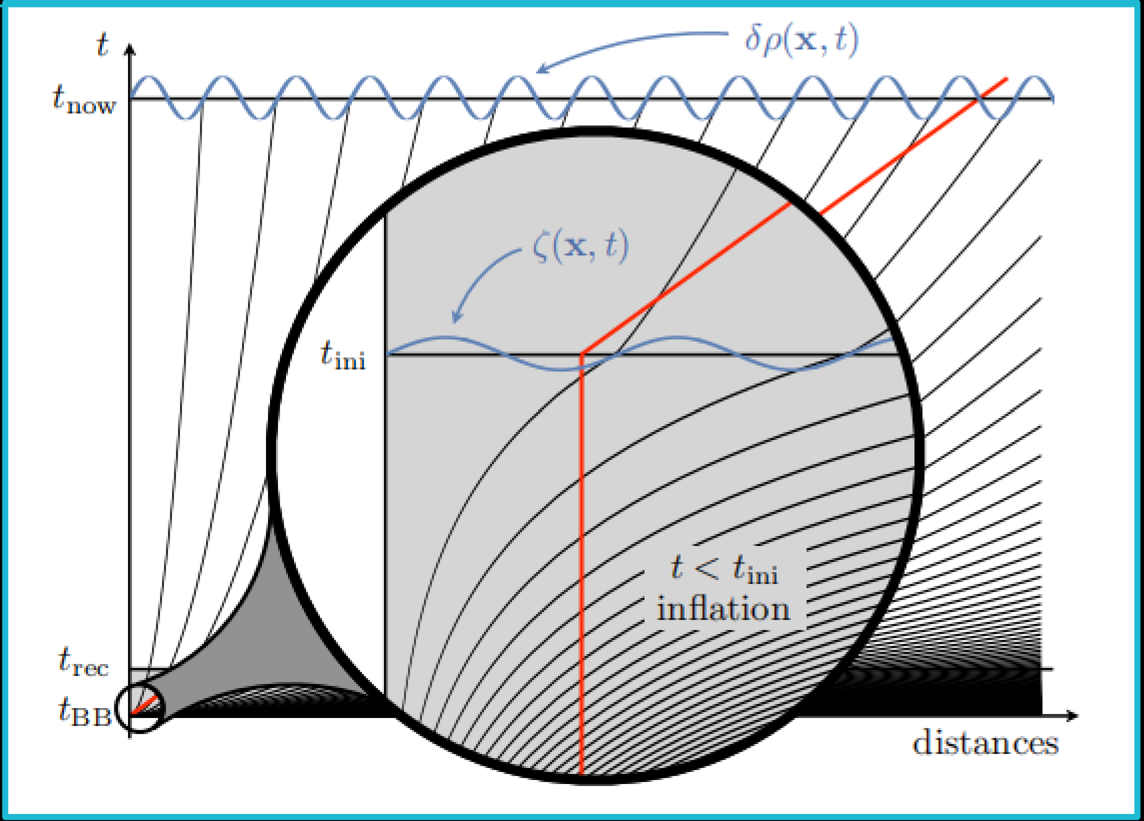
Se o Universo é plano hoje, tem que ter sido ainda mais plano no passado.

2. Motivações para a inflação

Fonte: Palma, 2008

Como a inflação resolve essas inconsistências?

Diminuindo o horizonte de Hubble!



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{aH}\right) = -\frac{\ddot{a}}{(aH)^2} < 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{a} > 0$$

(Expansão acelerada!)

(Elimina o problema da planitude de cara!)

Como conseguir expansão acelerada no universo?

Universo tipo De-Sitter

3. Um campo escalar que varia lentamente

Olhando para a segunda equação de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad \rightarrow \quad \ddot{a} > 0 \rightarrow \rho < 3P$$

Uma constante cosmológica faz justamente isso (energia escura por exemplo)

$$H = H_i \rightarrow \dot{a} = H_i a \quad \rightarrow \quad a \propto e^{H_i t}$$

Mas nesse caso a inflação nunca termina.

Não é possível o universo se reaquecer para reproduzir o Big-Bang (reheating problem)

O Universo nessa fase tem que ter H quase constante.

3. Um campo escalar que varia lentamente

Considere um universo dominado por um Campo escalar (Inflaton)

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right)$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Se o termo potencial for dominante e quase constante, o parâmetro de Hubble é aproximadamente constante: Quase De-Sitter

E finalmente temos campos no seminário de teoria quântica de campos

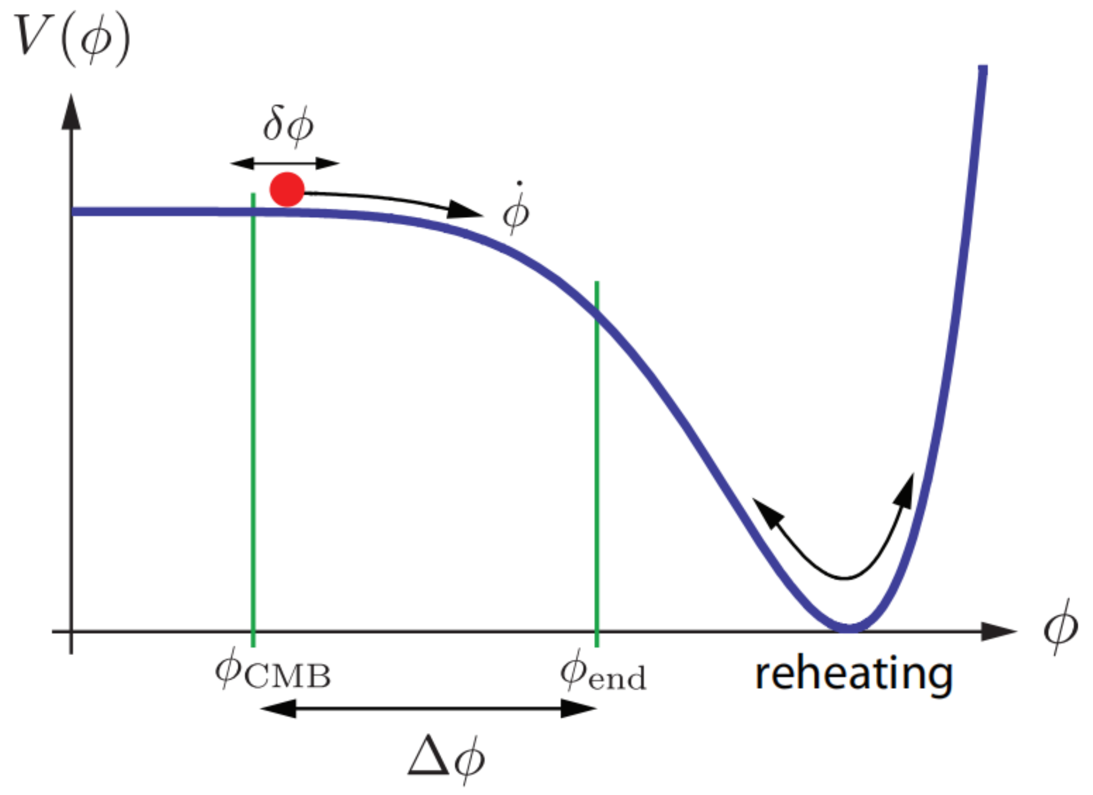
3. Um campo escalar que varia lentamente

Para estarmos em “slow-roll” é necessário que

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \eta = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H}$$

Sejam ambos pequenos ($\ll 1$)

Essas condições impõem fortes restrições na forma dos potenciais.



Fonte: Baumann, 2012

Daqui em diante buscamos entender como que as <u>flutuações quânticas</u> no vácuo do Inflaton dão <u>origem</u> às <u>flutuações de curvatura primordiais</u>.

4. Perturbações cosmológicas

4 graus
escalares
4 vetoriais
2 tensoriais

$$|h_{\mu\nu}|^2 \approx 0$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Métrica do "Background", FLRW

Perturbação na métrica: decomposição SVT
(SVT componentes don't mix at linear order)

$$h_{00} = -2A$$
$$h_{0i} = a(t)(\partial_i C + F_i)$$
$$h_{ij} = a^2(t)\left(2B\delta_{ij} + D_{ij}E + \partial_i G_j + \partial_j G_i + \gamma_{ij}\right)$$

Onde:

$$D_{ij} = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)$$

+ outras condições sobre F_i, G_i, γ_{ij}

E para o campo escalar:

$$\phi(x,t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x,t)$$

$$\delta\rho = \dot{\phi}_0\,\dot{\delta\phi} + \delta\phi\partial_\phi V$$
$$\delta p = \dot{\phi}_0\,\dot{\delta\phi} - \delta\phi\partial_\phi V$$

$$\delta u = -\frac{1}{\dot{\phi}_0}\delta\phi$$

4. Perturbações cosmológicas: liberdade de gauge

$$\phi(x,t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x,t)$$

$$\delta\rho = \dot{\phi}_0\,\delta\dot{\phi} + \delta\phi\,\partial_\phi V$$
$$\delta p = \dot{\phi}_0\,\delta\dot{\phi} - \delta\phi\,\partial_\phi V$$

$$\delta u = -\frac{1}{\dot{\phi}_0}\delta\phi$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{00} = -2A$$
$$h_{0i} = a(t)(\partial_i C + F_i)$$
$$h_{ij} = a^2(t)\left(2B\delta_{ij} + D_{ij}E + \partial_i G_j + \partial_j G_i + \gamma_{ij}\right)$$

A Relatividade Geral é invariante sob diffeomorfismos.

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu$$

Uma mudança de coordenadas reescreve as perturbações, podendo eliminar perturbações reais ou criar perturbações fictícias.

Gotta fix the gauge.

$$\xi_i = \partial_i \xi^S + \xi_i^V$$

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu$$

Podemos trabalhar com quantidades que são invariantes de gauge, fixar o gauge, ou ambos.

4. Perturbações cosmológicas: liberdade de gauge

$$\phi(x,t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x,t)$$

$$\delta\rho = \dot{\phi}_0\, \dot{\delta\phi} + \delta\phi\partial_\phi V$$
$$\delta p = \dot{\phi}_0\, \dot{\delta\phi} - \delta\phi\partial_\phi V$$

$$\delta u = -\frac{1}{\dot{\phi}_0}\delta\phi$$

$$\delta\rho' = \delta\rho + \xi_0\,\dot{\bar{\rho}}$$
$$\delta u' = \delta u - \xi_0$$
$$\delta p' = \delta p + \xi_0\dot{\bar{p}}$$
$$\dots$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{00} = -2A$$
$$h_{0i} = a(t)(\partial_i C + F_i)$$
$$h_{ij} = a^2(t)\big(2B\delta_{ij} + D_{ij}E + \partial_i G_j + \partial_j G_i + \gamma_{ij}\big)$$

$$A' = A + \dot{\xi}_0$$
$$C' = C - \frac{1}{a}\big(\dot{\xi}^S + \xi_0 - 2H\xi^S\big)$$
$$F_i' = F_i - \frac{1}{a}(\dot{\xi}_i^V - 2H\xi_i^V)$$

$$E' = E - \frac{2}{a^2}\xi^S$$
$$B' = B + H\xi_0 - \frac{1}{3a^2}\nabla^2\xi^S$$
$$G_j' = G_j - \frac{1}{a^2}\xi_j^V$$

4. Perturbações cosmológicas: liberdade de gauge

Existem algumas escolhas de gauge famosas, cada uma servindo a um propósito específico

Escolhemos o gauge comóvel, onde:

$$\delta\phi = 0, \qquad E' = 0, \qquad G_i' = 0$$

A perturbação de curvatura comóvel é a variável de interesse e é invariante de gauge.

$$\mathcal{R} = B - \frac{1}{6}\nabla^2 E - H\delta u$$

Curvatura do espaço nas hipersuperfícies comóveis: isso é, nas fatias espaciais da variedade no referencial comóvel, onde a velocidade peculiar da matéria é nula

A quantização é mais limpa no formalismo ADM

$$h_{ij} = a^2(\eta)(1 + 2\mathcal{R})\delta_{ij}$$

$\lim_{\epsilon \to 0^+}(5-\epsilon)$. Ação para a perturbação de curvatura

Escrevemos a métrica utilizando o formalismo ADM: (É mais fácil de separar os graus de liberdade físicos dos vínculos)

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + q_{ij}\left(\mathcal{N}^i dt + dx^i\right)\left(\mathcal{N}^j dt + dx^j\right)$$

A ação de Einstein-Hilbert torna-se:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G}\int dt \int d^3x\, \sqrt{q}\,\mathcal{N}\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right)$$

A curvatura extrínseca é definida como:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{N}}\left(\dot{q}_{ij} - \nabla_i \mathcal{N}_j - \nabla_j \mathcal{N}_i\right)$$

A ação para um campo escalar minimamente acoplado à gravidade torna-se:

$$S_\phi = \int dt \int d^3x\, \sqrt{q}\,\mathcal{N}\left(\frac{1}{2\mathcal{N}^2}\left(\dot{\phi} - \mathcal{N}^i \partial_i \phi\right)^2 - \frac{1}{2} q^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - V(\phi)\right)$$

$\lim_{\epsilon\to 0^+}(5-\epsilon)$. Ação para a perturbação de curvatura

O ansatz $q_{ij} = a^2(t)e^{2\mathcal{R}}\delta_{ij}$ é compatível com a perturbação incluída em todas as ordens em teoria de perturbação.

Introduzimos uma perturbação com a forma: $\mathcal{N} = 1 - \delta\mathcal{N}$ e expandimos em segunda ordem em $\mathcal{N}, \mathcal{N}_i$ e $\mathcal{R}$

Em primeira ordem obtemos vínculos não dinâmicos que uma vez substituídos na expressão em segunda ordem obtemos o resultado importante:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int d^4x\, a^3 e^{3\mathcal{R}} \Bigg[m_{\rm Pl}^2 \Bigg(& \mathcal{N} a^{-2} e^{-2\mathcal{R}} \left[-4\nabla^2\mathcal{R} - 2(\nabla\mathcal{R})^2\right] \\ & + \frac{1}{\mathcal{N}}\left[-6\left(H + \dot{\mathcal{R}} - \mathcal{N}^k\partial_k\mathcal{R}\right)^2 + 4\left(H + \dot{\mathcal{R}} - \mathcal{N}^k\partial_k\mathcal{R}\right)\partial_i\mathcal{N}^i\right] \\ & + \frac{1}{\mathcal{N}}\left[\frac{1}{2}\partial_i\mathcal{N}^j\partial_j\mathcal{N}^i + \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta^{kl}\partial_k\mathcal{N}^i\partial_l\mathcal{N}^j - (\partial_i\mathcal{N}^i)^2\right]\Bigg) \\ & + \frac{1}{\mathcal{N}}\dot{\phi}_0^2 - 2\mathcal{N}V(\phi_0)\Bigg]. \end{aligned}$$

(Me rendi, não vou datilografar esse monstro aqui

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = m_{pl}^2 \int d^4x\, a^3\epsilon\left[\dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{a^2}(\nabla\mathcal{R})^2\right]$$

5. Quantização em background curvo

Finalmente:

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = m_{pl}^2 \int d^4x\, a^3 \epsilon \left[\dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{a^2} (\nabla \mathcal{R})^2 \right]$$

Uma vez que no nosso gauge $\delta\phi = 0$, as perturbações do campo são transferidas para o setor gravitacional.

Nos resta apenas quantizar $\mathcal{R}$ e calcular seu espectro de potência assumindo como verdadeira a aproximação de slow-roll.

5. Quantização em background curvo

Uma forma instrutiva de prosseguir é quantizando o campo escalar em De-Sitter (H = constante)

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2\right)$$

Introduzindo $u = a(\tau)\phi$, e escrevendo em tempo conforme:

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau \int d^3x \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)u^2\right]$$

Identificamos o momento canônico como $\pi(x,\tau) = u'$

$$[\hat{u}(x,\tau), \hat{u}'(y,\tau)] = i\delta(x-y)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{u}} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\hat{u}'' - \nabla^2\hat{u} - \frac{1}{\tau^2}\left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\hat{u} = 0$$

5. Quantização em background curvo

$$\hat{u}'' - \nabla^2\hat{u} - \frac{1}{\tau^2}\left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(x,\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[u_k(\tau)\hat{a}_k e^{ikx} + u_k^*(\tau)\hat{a}_k^\dagger e^{-ikx}\right]$$

$$\hat{\pi}\,(x,\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[u'_k(\tau)\hat{a}_k e^{ikx} + u'^*_k(\tau)\hat{a}_k^\dagger e^{-ikx}\right]$$

$$[\hat{u}(x,\tau), \hat{\pi}\,(y,\tau)] = i\delta(x-y) \quad \rightarrow \quad \left[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\right] = 1$$

Contanto que a relação Wronskiana seja satisfeita:

$$u_k(\tau)u'^*_k(\tau) - u_k'(\tau)u_k^*(\tau) = i$$

$$u_k'' + \left[k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right)\right]u_k = 0$$

A solução geral para essa equação é uma combinação linear de funções de Hankel

$$u_k(\tau) = \alpha_k u^{(1)}(\tau) + \beta_k u^{(2)}(\tau)$$

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$$

A escolha desses coeficientes define o vácuo da teoria.

5. Quantização em background curvo

Vácuo de Bunch-Davies: as soluções tem de corresponder ao que seria no vácuo em Minkowski no ultravioleta

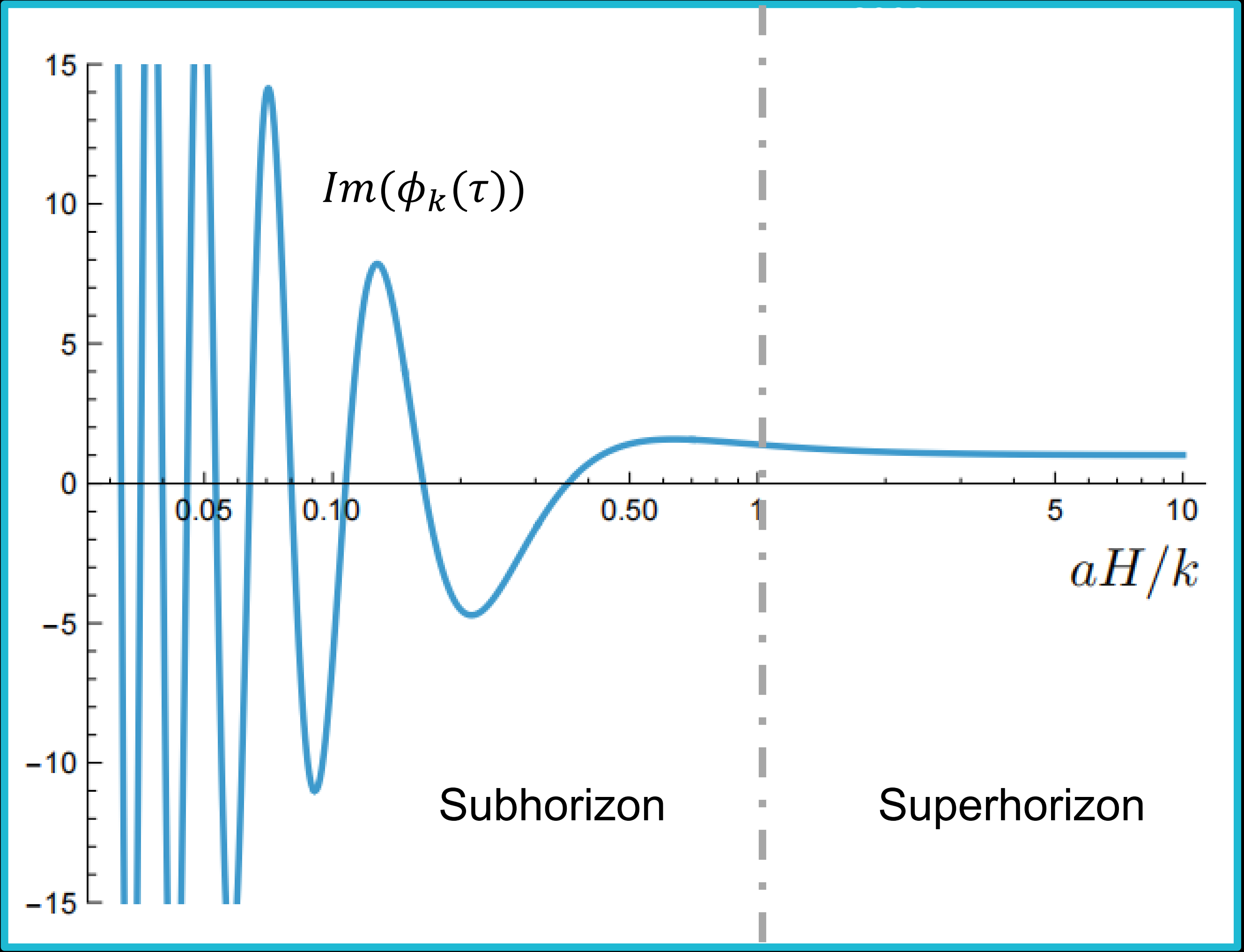
$$u_k(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}(-k\tau)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}H_\nu^1(-k\tau)$$

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}$$

No limite em que m = 0:

$$\phi_k(\tau) = \frac{iH}{\sqrt{2k^3}}(1 + ik\tau)e^{-ik\tau}$$

Adaptado de Palma,



5. Quantização em background curvo

$$\Delta(r_{12},t) = \langle 0|\hat{\phi}(r_1,t)\hat{\phi}(r_2,t)|0\rangle \longrightarrow \Delta(r_{12},\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{2\pi^2}{k^3}\right)\Delta_\phi(k,t)e^{-ikr_{12}}$$

$$\boxed{\Delta_\phi(k,t) = \frac{1}{2\pi^2}k^3|\phi_k(t)|^2}$$

Espectro de potências adimensional

5. Quantização em background curvo

$$\Delta_\phi(k,t) = \frac{1}{2\pi^2} k^3 |\phi_k(t)|^2$$

$$\phi_k(\tau) = \frac{iH}{\sqrt{2k^3}}(1 + ik\tau)e^{-ik\tau}$$

$$\Delta_\phi(k,t) = \frac{H^2}{4\pi^2}(1 + |k\tau|^2)$$

$|k\tau| \to 0$

$$\Delta_\phi(k,t) = \frac{H^2}{4\pi^2}$$

Invariante de escala

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H}$$

5. Quantização em background curvo

Finalmente:

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = m_{pl}^2 \int d\eta \int d^3x\, a^2 \epsilon \left[\dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{a^2}(\nabla \mathcal{R})^2\right]$$

Introduzindo

$$u = m_{pl}^2 \sqrt{2\epsilon} a \mathcal{R}$$

E integrando por partes:

Prosseguimos da mesma forma.

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau \int d^3x \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + a^2H^2\left(2 - \epsilon + \frac{3}{2}\eta + O(\epsilon^2, \eta^2)\right)u^2\right]$$

$$\tau = -\frac{1}{aH(1-\epsilon)}$$

Podemos demonstrar isso expandindo H nos parâmetros de slow-roll

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau \int d^3x \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(2 + \epsilon + \frac{3}{2}\eta\right)u^2\right]$$

Isso é idêntico a ação de um campo escalar massivo em De Sitter com uma massa efetiva:

$$m^2 = -3H^2\left(\epsilon + \frac{1}{2}\eta\right)$$

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H}$$

5. Quantização em background curvo

$$S_{\mathcal{R}}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau \int d^3x \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(2 + \epsilon + \frac{3}{2}\eta\right)u^2\right]$$

$$u_k(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}(-k\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)} H_\nu^1(-k\tau)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon + \frac{3}{2}\eta} \approx \frac{3}{2} + \epsilon + \frac{1}{2}\eta$$

$$\mathcal{R}_k(\tau) = \frac{iH_0}{\sqrt{4k^3 M_{pl}^2 \epsilon_0}}\left(\frac{k}{H_0}\right)^{-\epsilon-\frac{\eta}{2}}$$

$$|k\tau| \to 0$$

$$\mathcal{R}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{8M_{pl}^2\epsilon_0}} H_0^{1+\epsilon_0+\frac{\eta_0}{2}} \sqrt{\pi}(-\tau)^{\frac{3}{2}+\epsilon+\frac{\eta}{2}} e^{i\pi\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)} H_\nu^{(1)}(-k\tau)$$

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H}$$

5. Quantização em background curvo

$$\mathcal{R}_k(\tau) = \frac{iH_0}{\sqrt{4k^3 M_{pl}^2 \epsilon_0}} \left(\frac{k}{H_0}\right)^{-\epsilon-\frac{\eta}{2}}$$

$$\Delta_\phi(k,t) = \frac{H^2}{8\pi^2 M_{pl}^2 \epsilon} \left(\frac{k}{H}\right)^{-2\epsilon-\eta}$$

Quase invariante de escala!

n_s restringe a forma do potencial inflacionário

$$\Delta^2(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1}$$

$$n_s = 0.965 \pm 0.004$$

(E tem bem mais: ondas gravitacionais primordiais, bispectrum...)

Muito obrigado a todos!

Principais referências:

Palma, Gonzalo A. **Lecture notes on primordial cosmology**. V Joint ICTP-Trieste/ICTP-SAIFR School on Cosmology.

Baumann, Daniel. **TASI Lectures on Inflation**. arXiv:0907.5424v2, 30 Nov 2012.

Baumann, Daniel. **Cosmology**. University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom, 2022.