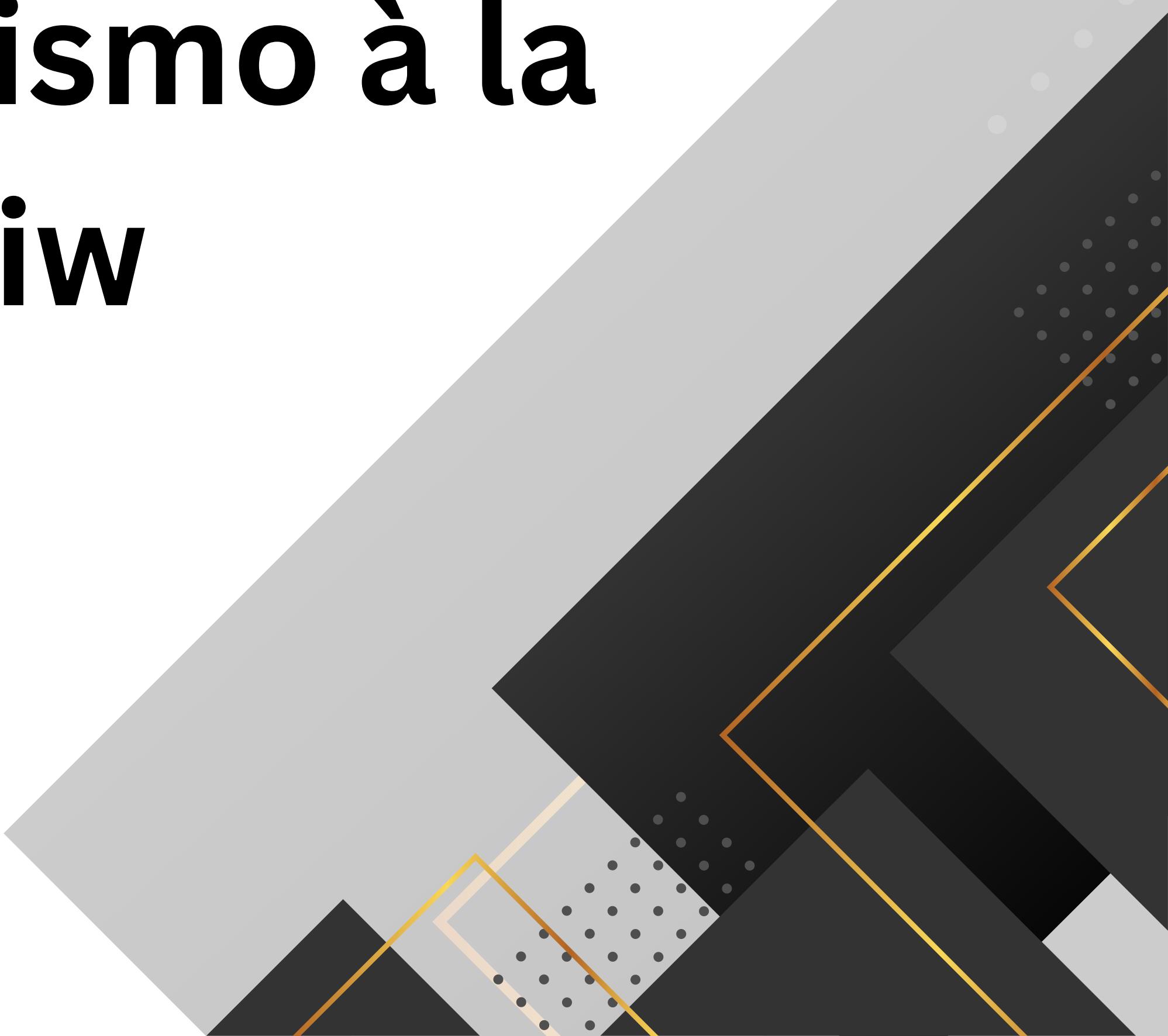


Eletromagnetismo à la Faddeev-Jackiw

Rafael Ottoni



Motivação

- De onde veio isso?



$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\vec{\nabla}^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

(Nastase, pg 147 / Lecture notes, pg 163)

- Por que o campo eletromagnético precisa de um tratamento "especial" na quantização canônica?
- Há outros sistemas com esse mesmo problema?
- Como lidar com esse problema de uma maneira coerente e sistemática?



Sumário

- 1. Sistemas vinculados**
- 2. Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico**
 - a. Variedades diferenciáveis
 - b. Formas diferenciais
 - c. Estrutura de Poisson
 - d. O teorema de Darboux
- 3. Geometria simplética de campos**
- 4. A geometria de sistemas vinculados**
- 5. O método de Faddeev-Jackiw**
- 6. Campo eletromagnético**
 - a. Quantização canônica
 - b. Quantização funcional

O que é um sistema vinculado?

- O processo de quantização canônica de uma teoria exige a construção de sua formulação Hamiltoniana pela transformada de Legendre

$$L \rightarrow H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

- Precisamos isolar as velocidades nas equações: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$
- Contudo, isso só é possível se a matriz Hessiana for invertível:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$$

- Se H é invertível, dizemos que o sistema dinâmico é *regular*

O que é um sistema vinculado?

- Caso H seja uma matriz singular (não invertível), dizemos que o sistema dinâmico é *singular* ou *vinculado*
- Quando isso acontece, aquelas equações $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ em que as velocidades não podem ser isoladas tornam-se equações de vínculo
- Temos, portanto, um número menor de equações de movimento do que de variáveis
- O resultado disso é que as soluções para as equações de Hamilton não são unicamente determinadas por suas condições iniciais (há *degenerescência* nas soluções)

O que é um sistema vinculado?

- Quantização canônica:
 - A estrutura de Poisson não é bem definida
 - Há uma estrutura de Poisson “escondida” em um subespaço do espaço de fase (que é onde realmente acontece a dinâmica)
- Quantização funcional:
 - A degenerescência nas soluções faz com que somemos configurações de campo a mais, que já foram somadas
 - Para isso precisamos restringir o espaço de fase, excluindo essas configurações

O que é um sistema vinculado?

Método de Dirac:

- aplicamos os vínculos na Hamiltoniana
- reduzimos o espaço de fase para eliminar as degenerescências
- chegamos em um espaço de fase regular

Método de Faddeev-Jackiw:

- aplicamos os vínculos na *1-forma canônica* do sistema
- aumentamos o espaço de fase para chegar em um regular adicionando novos graus de liberdade
- ao final, excluímos os graus de liberdade não-físicos

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Por que usar geometria diferencial pra descrever um sistema clássico?

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Por que usar geometria diferencial pra descrever um sistema clássico?

Estado físico de um sistema: (\mathbf{q}, \mathbf{p})

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Por que usar geometria diferencial pra descrever um sistema clássico?

Estado físico de um sistema: (\mathbf{q}, \mathbf{p})

- Não depende do sistema de coordenadas escolhido pra descrevê-lo

$\rightarrow (q^i, p_i)$ ou (Q^i, P_i)

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Por que usar geometria diferencial pra descrever um sistema clássico?

Estado físico de um sistema: (\mathbf{q}, \mathbf{p})

- Não depende do sistema de coordenadas escolhido pra descrevê-lo
- Podemos escolher diferentes sistemas de coordenadas e mapear um no outro

$$\rightarrow (q^i, p_i) \text{ ou } (Q^i, P_i)$$

$$\rightarrow Q = Q(q), P = P(p)$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Por que usar geometria diferencial pra descrever um sistema clássico?

Estado físico de um sistema: (\mathbf{q}, \mathbf{p})

- Não depende do sistema de coordenadas escolhido pra descrevê-lo
- Podemos escolher diferentes sistemas de coordenadas e mapear um no outro
- Esses mapas precisam ser invertíveis e diferenciáveis

$$\rightarrow (q^i, p_i) \text{ ou } (Q^i, P_i)$$

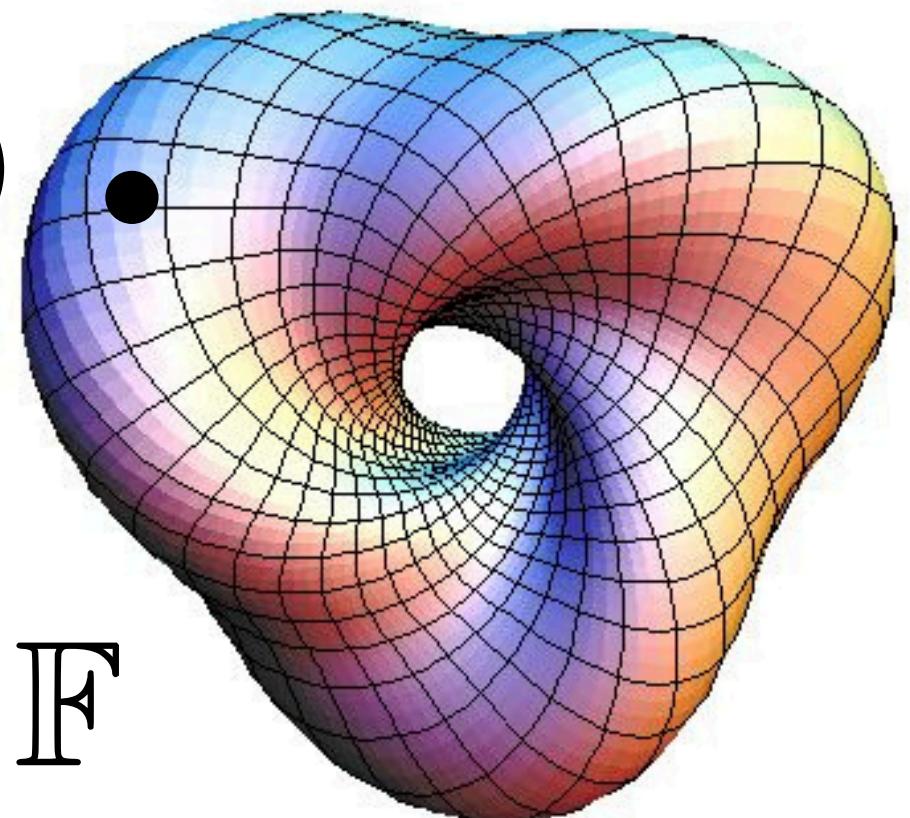
$$\rightarrow Q = Q(q), P = P(p)$$

$$\rightarrow \dot{Q} = \dot{Q}(q, \dot{q}), q = q(Q)$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O estado físico de um sistema é um ponto de uma
variedade diferenciável

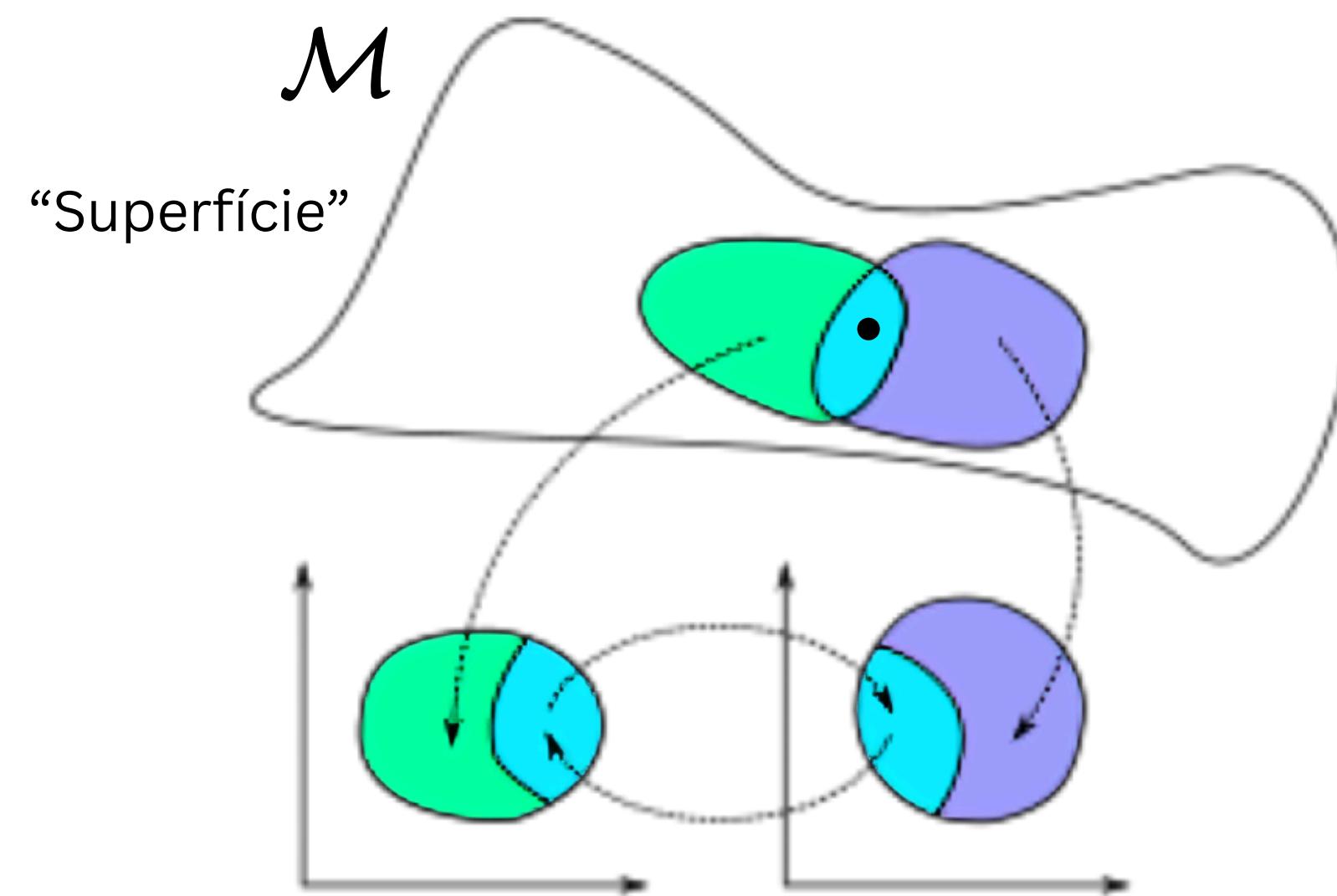
$$\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$$



A variedade de fase \mathbb{F}

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

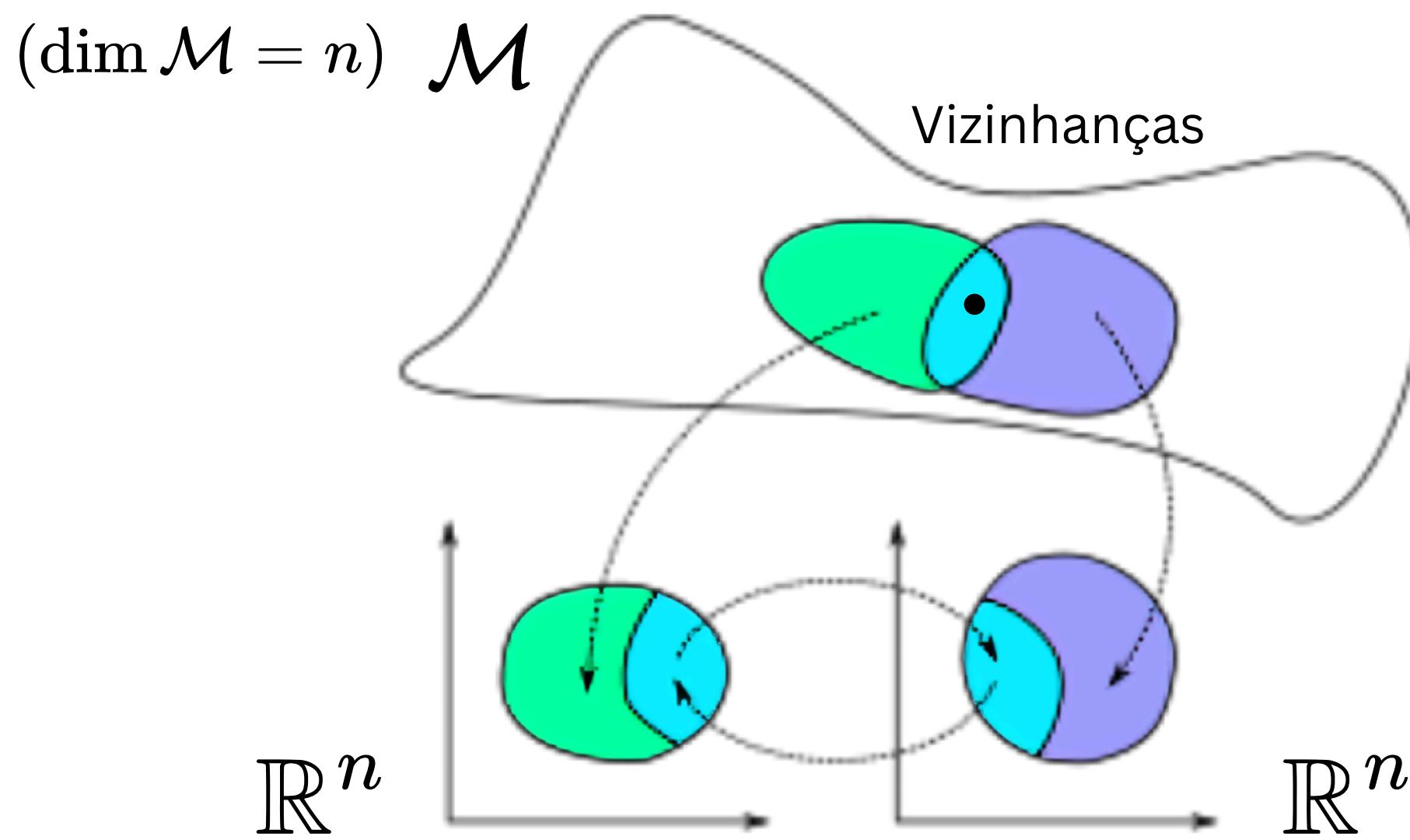
Variedades diferenciáveis



O que é uma variedade diferenciável?

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Variedades diferenciáveis

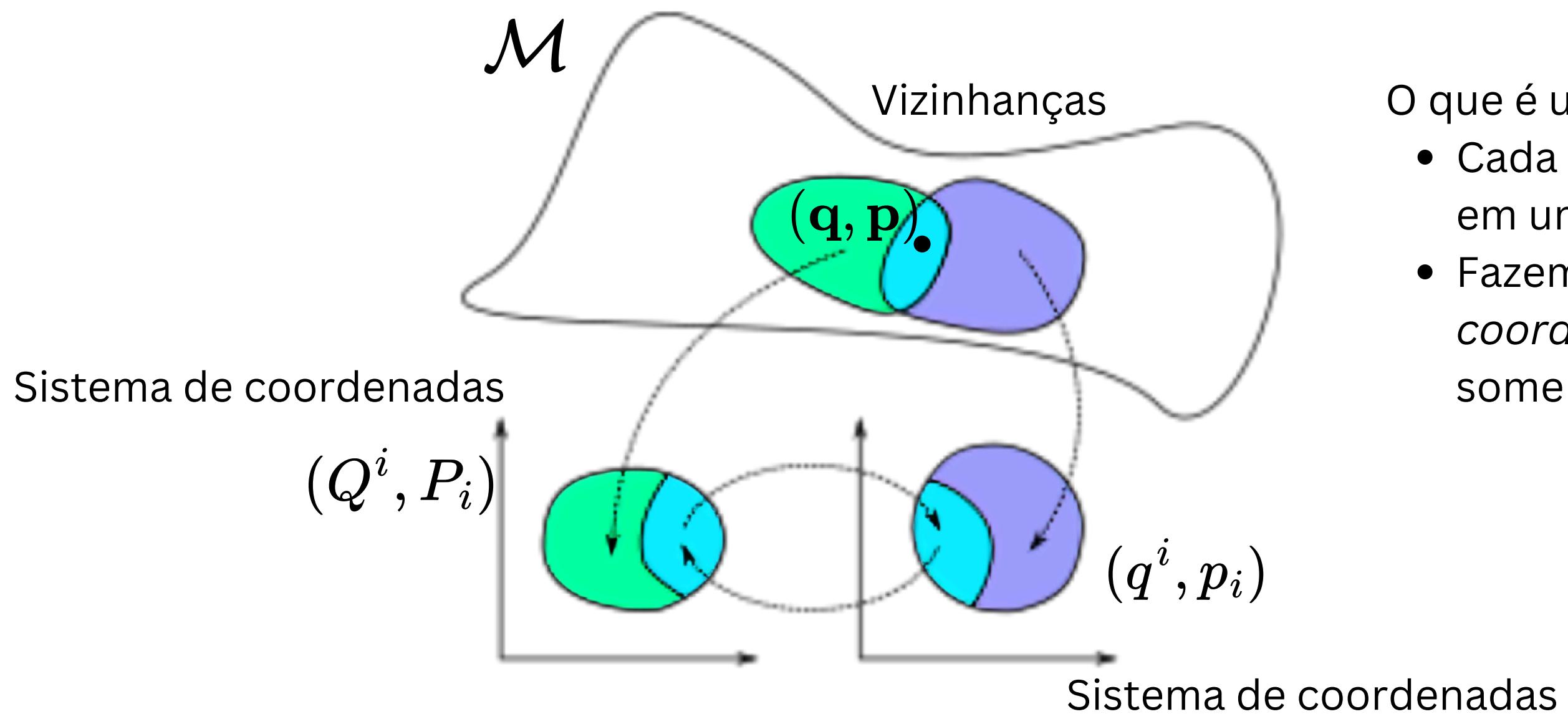


O que é uma variedade diferenciável?

- Cada vizinhança pode ser mapeada em uma vizinhança de \mathbb{R}^n

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Variedades diferenciáveis

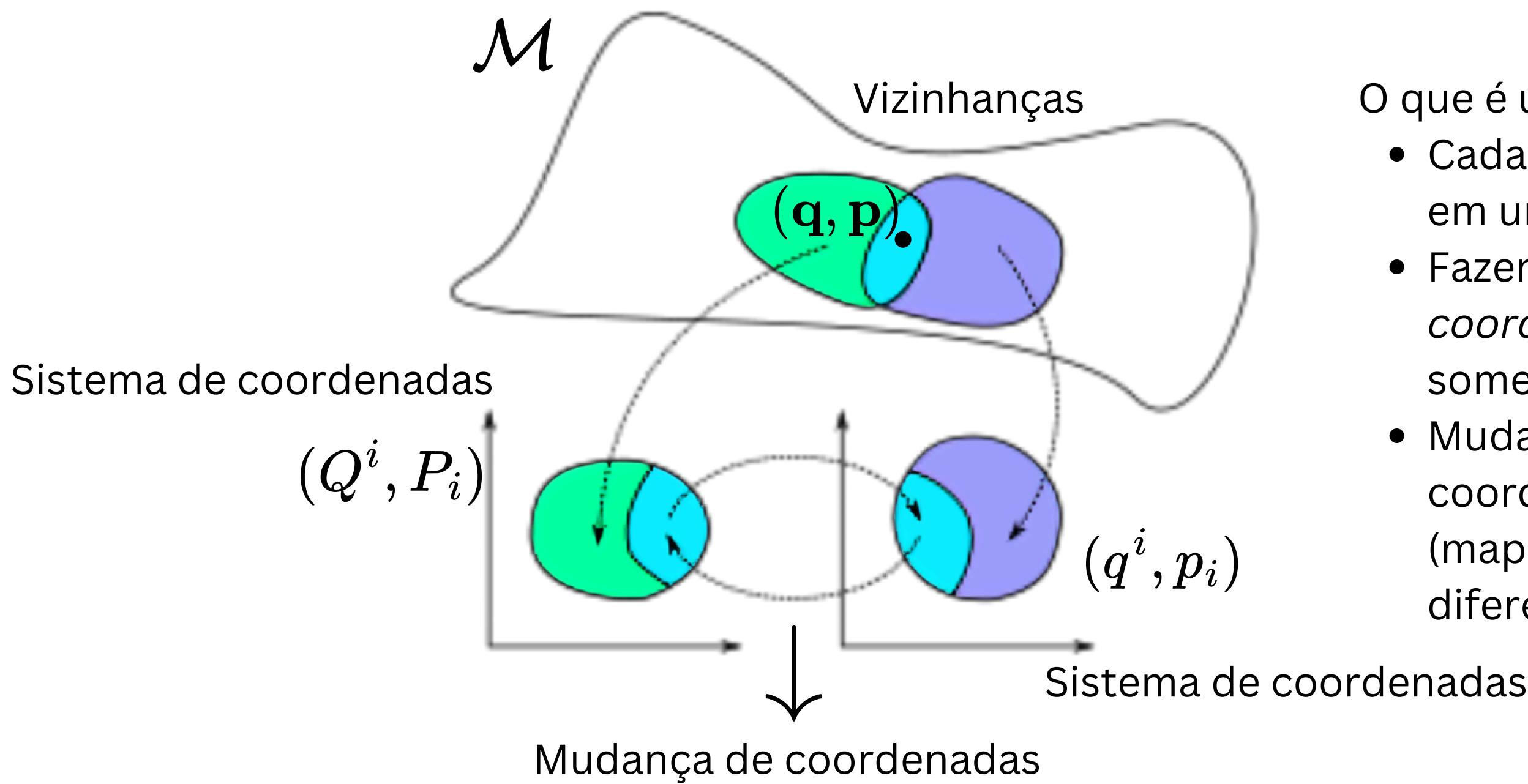


O que é uma variedade diferenciável?

- Cada vizinhança pode ser mapeada em uma vizinhança de \mathbb{R}^n
- Fazemos isso por meio de *sistemas de coordenadas locais* (local: válido somente nessa vizinhança)

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Variedades diferenciáveis

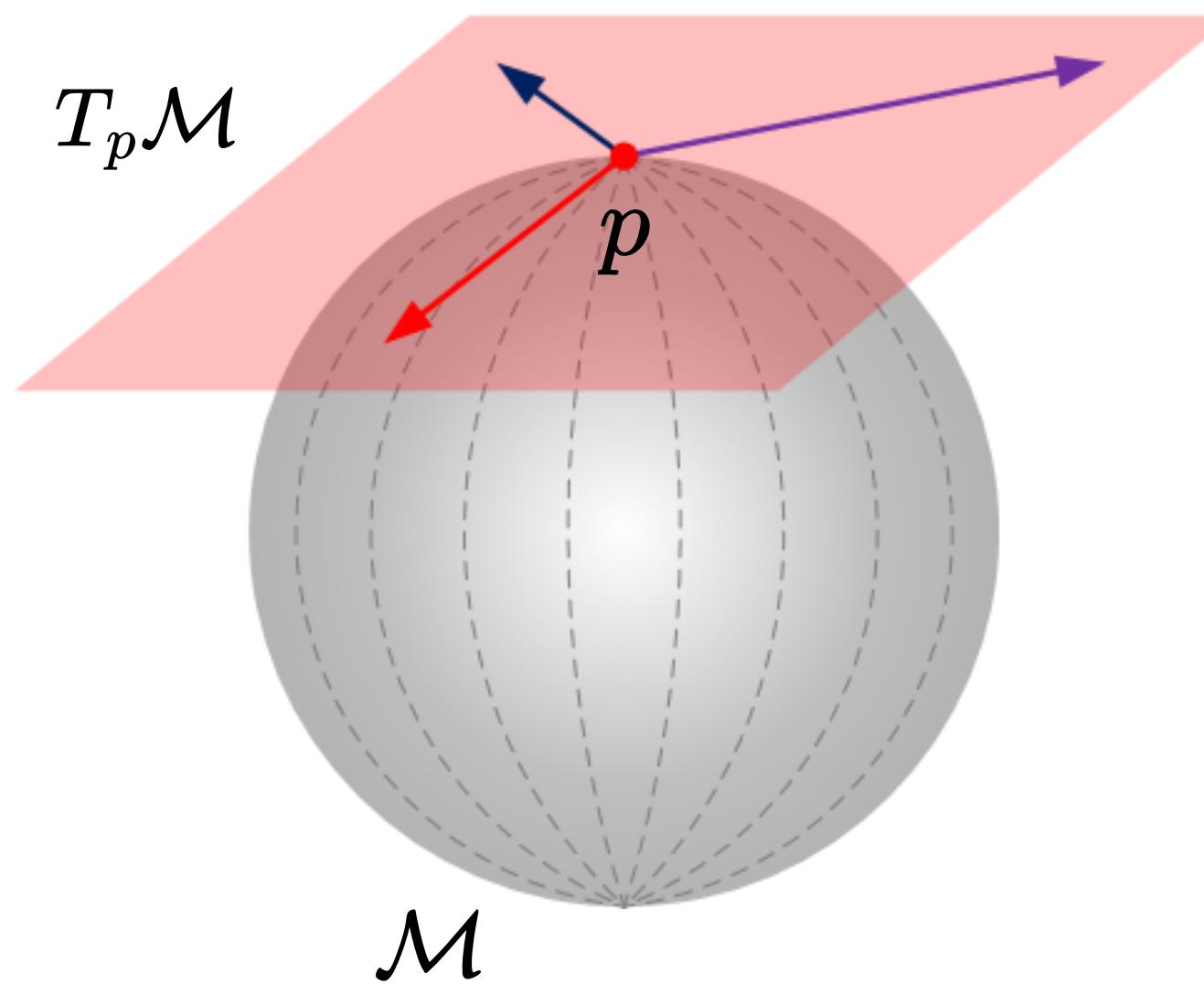


O que é uma variedade diferenciável?

- Cada vizinhança pode ser mapeada em uma vizinhança de \mathbb{R}^n
- Fazemos isso por meio de *sistemas de coordenadas locais* (local: válido somente nessa vizinhança)
- Mudanças de sistemas de coordenadas são *difeomorfismos* (mapa diferenciável e com inversa diferenciável)

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Variedades diferenciáveis



- A cada ponto p de uma variedade há um espaço vetorial associado: o *espaço tangente* $T_p\mathcal{M}$
- Se o sistema de coordenadas nessa vizinhança é x^μ , a base nesse espaço é

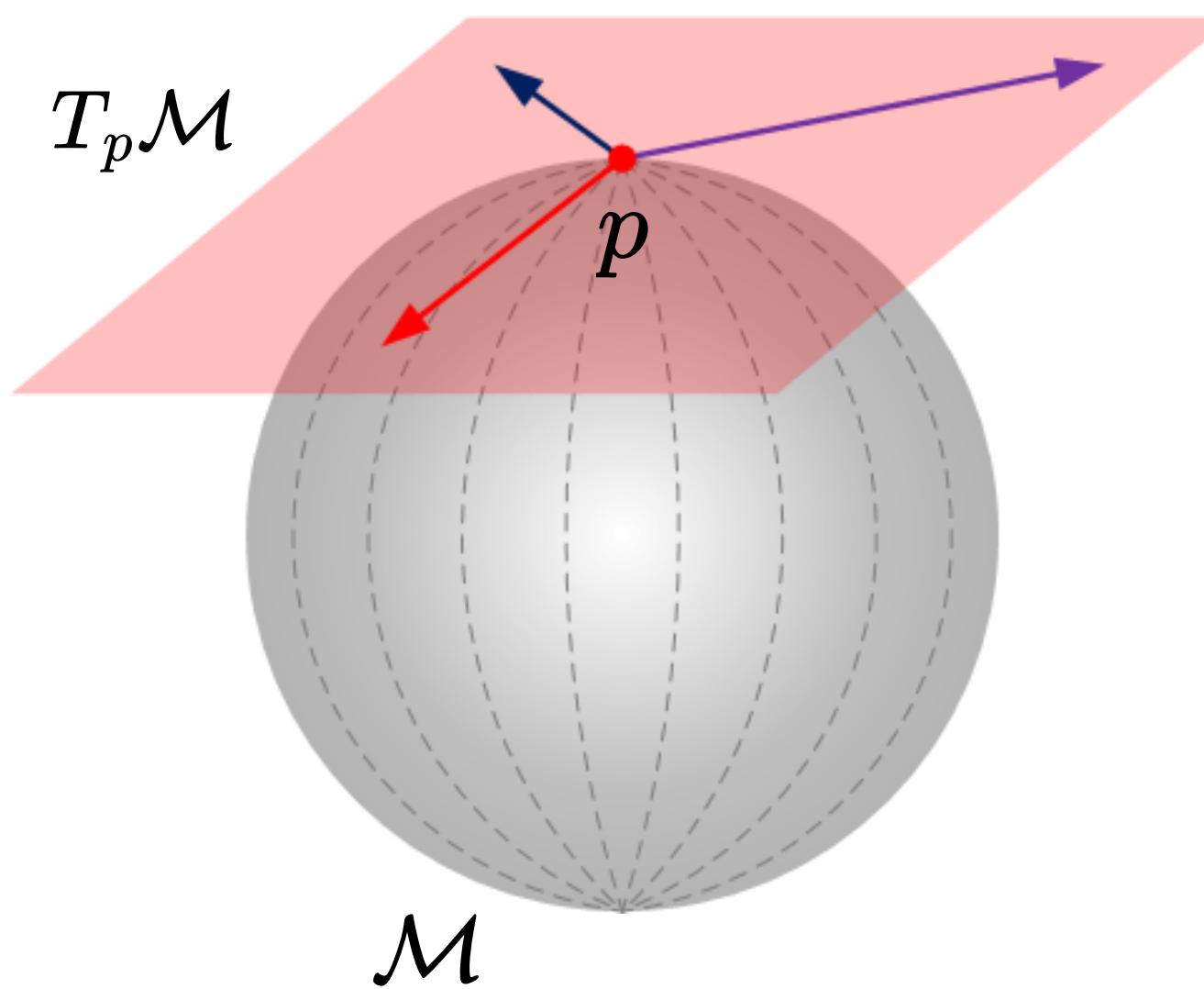
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$$

- Os vetores nesse espaço são decompostos em componentes como

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Variedades diferenciáveis



- Esse espaço tem um dual, o espaço cotangente $T_p^*\mathcal{M}$
- Os objetos desse espaço são covetores

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$$

- Por meio de produtos tensoriais desses espaços, construímos tensores:

$$T_p^{(k,l)}\mathcal{M} = \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p\mathcal{M}}_{k \text{ vezes}} \otimes \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p^*\mathcal{M}}_{l \text{ vezes}}$$

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}$$

tensor de ordem (k,l)

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Formas diferenciais

Uma *p-forma diferencial* é um tensor de **ordem (0,p)** completamente antissimétrico

- Uma 1-forma é simplesmente um covetor: $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$
- Construímos formas de ordem maior por meio do *produto exterior* \rightarrow produto tensorial antissimétrico

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \text{ base de 2-formas} \quad (dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu)$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \text{ base de 3-formas}$$

etc.

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Formas diferenciais

A *derivada exterior* é operador diferencial que toma uma p-forma e transforma em uma (p+1)-forma

é uma generalização do gradiente

- escalar $f = f(x) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \nabla f \cdot d\vec{x}$

- 1-forma $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu \rightarrow d\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu$

etc.

operador *nilpotente*: $d^2 = 0$

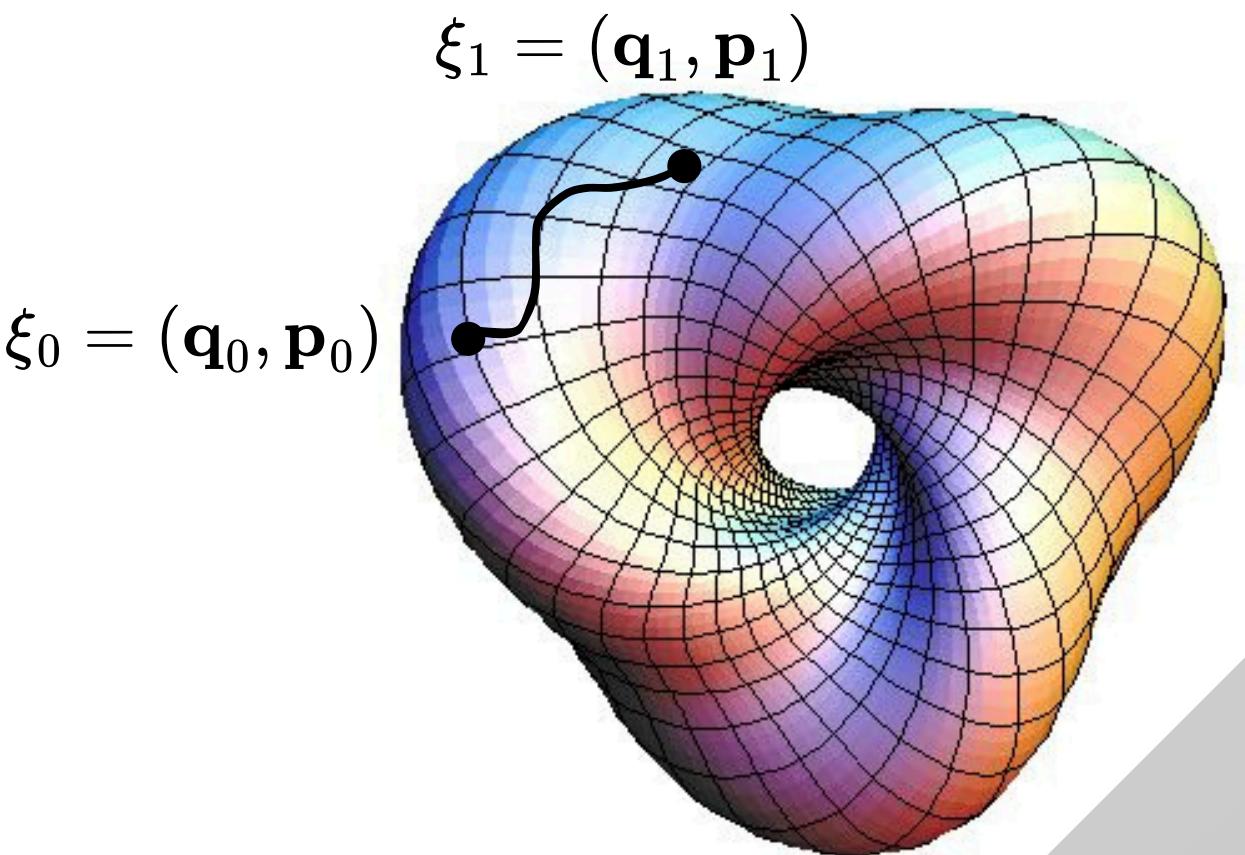
Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

- Dinâmica de um sistema clássico → curvas em uma variedade diferenciável
- Evolução dos estados → função Hamiltoniana e parênteses de Poisson

$$\dot{q} = \{q, H\}, \dot{p} = \{p, H\}$$

- A estrutura de Poisson é definida através de uma 2-forma simplética ω

→ para a dinâmica ser bem definida,
 \mathbb{F} precisa ser uma variedade simplética



Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O que é essa forma simplética?

Dada a Lagrangiana de um sistema, calculamos seus momentos conjugados e sua Hamiltoniana através de

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

Esses momentos são as componentes de uma 1-forma da variedade de fase

$$\theta = \theta_\mu d\xi^\mu = p_i dq^i$$

a **1-forma canônica**,

sendo as coordenadas unificadas da variedade de fase: $\xi^\mu = (q^i, p_i)$.

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Se o sistema for regular, os momentos são todos independentes entre si, o que resulta na sua derivada exterior sendo

$$\boxed{\omega = dp_i \wedge dq^i} \rightarrow \text{a 2-forma canônica.}$$

Em forma matricial,

$$\omega = \omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu$$

sendo

$$d\xi^\mu = \begin{bmatrix} dq^i \\ dp_i \end{bmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Nesse caso, a 2-forma canônica obedece duas propriedades globais (independente do sistema de coordenadas)

- Ela é **fechada** $d\omega = 0$
- Ela é **não-degenerada** $\det \omega_{\mu\nu} \neq 0$

Uma 2-forma que obedece essas duas propriedades é dita uma forma **simplética**.

A variedade de fase de um sistema regular, portanto é uma **variedade simplética**.

Essa forma simplética gera naturalmente a estrutura de Poisson da variedade de fase da seguinte forma:

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

se ω simplética $\rightarrow (\det \omega_{\mu\nu} \neq 0)$ então $\omega_{\mu\nu}$ é **invertível**

Podemos definir o seguinte campo tensorial W pelas componentes de sua matriz inversa:

$$\omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \rightarrow \omega^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \equiv W$$

$$\omega_{\mu\nu} \omega^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto:

$$W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto: $W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$

- Ação na variedade de fase: $C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow W[f(\xi), g(\xi)] = h(\xi)$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto: $W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$

- Ação na variedade de fase: $C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow W[f(\xi), g(\xi)] = h(\xi)$
- Antissimetria: $W[f(\xi), g(\xi)] = -W[g(\xi), f(\xi)]$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto: $W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$

- Ação na variedade de fase: $C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow W[f(\xi), g(\xi)] = h(\xi)$
- Antissimetria: $W[f(\xi), g(\xi)] = -W[g(\xi), f(\xi)]$
- Bilinearidade: $W[f(\xi), \alpha g(\xi) + \beta h(\xi)] = \alpha W[f(\xi), g(\xi)] + \beta W[f(\xi), h(\xi)]$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto: $W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$

- Ação na variedade de fase: $C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow W[f(\xi), g(\xi)] = h(\xi)$
- Antissimetria: $W[f(\xi), g(\xi)] = -W[g(\xi), f(\xi)]$
- Bilinearidade: $W[f(\xi), \alpha g(\xi) + \beta h(\xi)] = \alpha W[f(\xi), g(\xi)] + \beta W[f(\xi), h(\xi)]$
- Regra de Leibniz: $W[f(\xi), g(\xi)h(\xi)] = W[f(\xi), g(\xi)]h(\xi) + W[f(\xi), h(\xi)]g(\xi)$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Propriedades deste objeto: $W[f(\xi), g(\xi)] = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$

- Ação na variedade de fase: $C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow W[f(\xi), g(\xi)] = h(\xi)$
- Antissimetria: $W[f(\xi), g(\xi)] = -W[g(\xi), f(\xi)]$
- Bilinearidade: $W[f(\xi), \alpha g(\xi) + \beta h(\xi)] = \alpha W[f(\xi), g(\xi)] + \beta W[f(\xi), h(\xi)]$
- Regra de Leibniz: $W[f(\xi), g(\xi)h(\xi)] = W[f(\xi), g(\xi)]h(\xi) + W[f(\xi), h(\xi)]g(\xi)$
- Identidade de Jacobi: $W[f(\xi), W[g(\xi), h(\xi)]] + W[h(\xi), W[f(\xi), g(\xi)]] + W[g(\xi), W[h(\xi), f(\xi)]] = 0$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Essas 5 características são a definição de um **parêntese de Poisson**

$$\{f(\xi), g(\xi)\} \equiv \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Essas 5 características são a definição de um **parêntese de Poisson**

$$\{f(\xi), g(\xi)\} \equiv \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$$

Substituindo as componentes da matriz simplética, $\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix} \omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Essas 5 características são a definição de um **parêntese de Poisson**

$$\{f(\xi), g(\xi)\} \equiv \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$$

Substituindo as componentes da matriz simplética, $\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$ $\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Essas 5 características são a definição de um **parêntese de Poisson**

$$\{f(\xi), g(\xi)\} \equiv \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu}$$

Substituindo as componentes da matriz simplética, $\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$ $\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \xi^\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Para a quantização canônica, precisamos dos *parênteses de Poisson fundamentais*:

$$\{\xi^\mu; \xi^\nu\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\sigma} \omega^{\sigma\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\rho} = \omega^{\mu\nu}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Para a quantização canônica, precisamos dos *parênteses de Poisson fundamentais*:

$$\{\xi^\mu; \xi^\nu\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\sigma} \omega^{\sigma\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\rho} = \omega^{\mu\nu} \rightarrow \text{são as componentes da inversa da matriz simplética}$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Para a quantização canônica, precisamos dos *parênteses de Poisson fundamentais*:

$$\{\xi^\mu; \xi^\nu\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\sigma} \omega^{\sigma\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\rho} = \omega^{\mu\nu} \rightarrow \text{são as componentes da inversa da matriz simplética}$$

explicitamente,

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix} \quad \{q^i; q^j\} = 0, \quad \{p_i; p_j\} = 0, \quad \{q^i; p_j\} = \delta_j^i$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

Estrutura de Poisson

Para a quantização canônica, precisamos dos *parênteses de Poisson fundamentais*:

$$\{\xi^\mu; \xi^\nu\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\sigma} \omega^{\sigma\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\rho} = \omega^{\mu\nu} \rightarrow \text{são as componentes da inversa da matriz simplética}$$

explicitamente,

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix} \quad \{q^i; q^j\} = 0, \quad \{p_i; p_j\} = 0, \quad \{q^i; p_j\} = \delta_j^i$$

(mas isso não é verdade em qualquer sistema de coordenadas)

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O teorema de Darboux

Essas formas dos parênteses de Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}, \quad \{q^i; q^j\} = 0, \quad \{p_i; p_j\} = 0, \quad \{q^i; p_j\} = \delta_j^i,$$

não são válidas em todo sistema de coordenadas. Só aqueles em que a 2-forma canônica tem como componentes

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \quad \omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$$

mas como demonstramos antes, a dinâmica de um sistema não depende do sistema de coordenadas → transformações pra outros sistemas mudam as componentes da 2-forma canônica

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O teorema de Darboux

Para que essas equações façam sentido, é preciso que em todo ponto da variedade de fase sejamos capazes de encontrar um sistema de coordenadas em que a 2-forma canônica fique assim

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \quad \omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$$

Em um sistema regular isso é garantido pelo teorema de Darboux.

Teorema de Darboux: Toda variedade simplética admite em todas as suas vizinhanças um *sistema de coordenadas canônico*, em que a 2-forma canônica toma a forma

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O teorema de Darboux

Não temos problemas em quantizar sistemas regulares utilizando a prescrição

$$\{q^i, p_i\} = \delta_j^i \rightarrow [\hat{q}^i, \hat{p}_i] = i\hbar \hat{I} \delta_j^i$$

$$\{\phi^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\} = \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow [\hat{\phi}^\mu(\vec{x}), \hat{\pi}_\nu(\vec{y})] = i\hbar \hat{I} \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

pois estes têm uma variedade de fase simplética, portanto obedecem ao teorema de Darboux e pode-se sempre achar um sistema de coordenadas em que os PP tomam essa forma.

Mecânica clássica de um ponto de vista geométrico

O teorema de Darboux

Por que não podemos aplicar essa prescrição para o campo eletromagnético?

O campo eletromagnético **não** é um sistema regular, sua matriz Hessiana, $H_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu \partial \dot{A}^\nu}$ é singular:

$$\det H_{\mu\nu} = 0$$

Isso faz sua variedade de fase não ser simplética → não conseguimos encontrar um sistema de coordenadas de Darboux e também não podemos definir uma estrutura de Poisson

Precisamos modificar a variedade de fase de alguma forma pra que isso se torne possível

Geometria simplética de campos

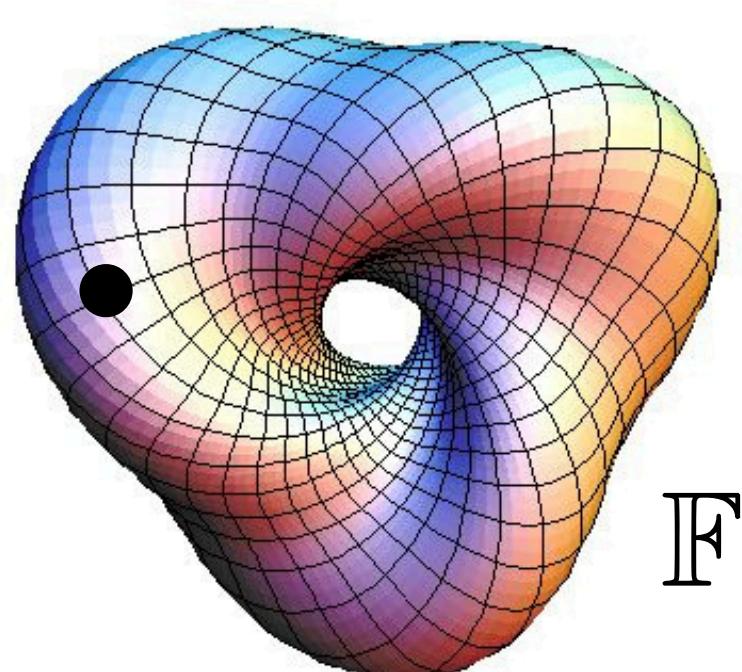
Para estudar a estrutura geométrica da variedade de fase de um sistema com infinitos graus de liberdade, precisamos fazer algumas alterações

Em um sistema com graus de liberdade finitos, cada ponto de \mathbb{F} é um número (ou uma coleção finita de números)

Em um sistema com infinitos graus de liberdade, cada ponto é uma configuração de campo, uma função (ou uma coleção finita de funções)

$$q^i \rightarrow \phi^a(x), \ p_i \rightarrow \pi_a(x)$$

$$\xi^\mu(x) = \begin{bmatrix} \phi^a(x) \\ \pi_a(x) \end{bmatrix}$$



Geometria simplética de campos

Isso faz com que:

- Derivadas → derivadas funcionais
- Funções → funcionais
- Somas → somas+integrais

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \rightarrow X = \int d^3x \ X^\mu(x) \frac{\delta}{\delta \xi^\mu(x)}$$

$$\alpha = \alpha_\mu d\xi^\mu \rightarrow \alpha = \int d^3x \ \alpha_\mu(x) \delta\xi^\mu(x)$$

↓
omitindo as integrais

Pra não deixar a notação carregada,
vamos omitir as integrais (assim como já
omitimos as somas nos índices)

$$X = X^\mu \frac{\delta}{\delta \xi^\mu}$$

campo vetorial

$$\alpha = \alpha_\mu \delta\xi^\mu$$

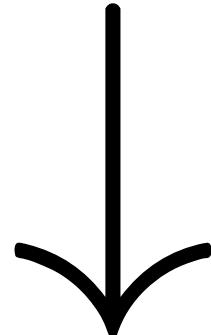
1-forma

Geometria simplética de campos

A derivada exterior é calculada como uma variação de um funcional

$$\alpha = \alpha_\mu d\xi^\mu \rightarrow \alpha = \int d^3x \alpha_\mu(x) \delta\xi^\mu(x)$$

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \xi^\nu} d\xi^\nu \wedge d\xi^\mu \rightarrow \delta\alpha = \int d^3x d^3y \frac{\delta \alpha_\mu(x)}{\delta \xi^\nu(y)} \delta\xi^\nu(y) \wedge \delta\xi^\mu(x)$$



$$\boxed{\delta\alpha = \frac{\delta \alpha_\mu}{\delta \xi^\nu} \delta\xi^\nu \wedge \delta\xi^\mu}$$

derivada exterior

Geometria simplética de campos

A 1-forma canônica em um sistema de coordenadas canônico se torna

$$\theta = p_i dq^i \rightarrow \theta = \int d^3x \pi_a(x) \delta\phi^a(x) \rightarrow \boxed{\theta = \pi_a \delta\phi^a}$$

a 2-forma canônica

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i \rightarrow \omega = \delta\theta = \int d^3x d^3y \delta_a^b \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta\pi_b(y) \wedge \delta\phi^a(x) \rightarrow \boxed{\omega = \delta\pi_a \wedge \delta\phi^a}$$

e os parênteses de Poisson fundamentais

$$\begin{array}{ccc} \{\xi^\mu, \xi^\nu\} = \omega^{\mu\nu} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \{\xi^\mu(x), \xi^\nu(y)\} = \omega^{\mu\nu}(x, y) \\ \{q^i, p_i\} = \delta_j^i & & \{\phi^a(x), \pi_b(y)\} = \delta_b^a \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{array}$$

A geometria de sistemas vinculados

Para um sistema regular, as equações $\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a}$ não geram equações de vínculo

Portanto os momentos são independentes entre si, e ao derivar a 1-forma canônica

$$\theta = \pi_a \delta\phi^a$$

temos

$$\delta\theta = \delta\pi_a \wedge \delta\phi^a = \omega$$

A geometria de sistemas vinculados

Em um sistema vinculado, contudo, alguns dos momentos canônicos podem ter uma dependência nas coordenadas ou em outros momentos, o que faz sua derivada exterior ser

$$\delta\theta = \left(\frac{\delta\pi_a}{\delta\pi_b} \delta\pi_b + \frac{\delta\pi_a}{\delta\phi^b} \delta\phi^b \right) \wedge \delta\phi^a$$

A 2-forma resultante desse processo se torna singular, não invertível

$$\omega \equiv \delta\theta \rightarrow \det \omega_{\mu\nu} = 0$$

Não temos, portanto, uma estrutura de Poisson bem definida, pois a matriz inversa não existe

$$\{\xi^\mu(\vec{x}), \xi^\nu(\vec{y})\} \neq \omega^{\mu\nu} \rightarrow \{\phi^a(\vec{x}), \pi_b(\vec{y})\} \neq \delta_b^a \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Método de Faddeev-Jackiw

Pra resolver esse problema, utilizamos do fato que uma matriz degenerada possui necessariamente autovetores cujo autovalor é nulo

$$\omega_{\mu\nu} X^\nu = 0$$

prova-se que para cada autovetor X , temos a seguinte equação

$$\chi \equiv X^\mu \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu} = 0$$

que é o que definimos como uma **equação de vínculo** do sistema. Cada χ é denominado um **vínculo dinâmico**, pois resulta da Lagrangiana de cada sistema

Método de Faddeev-Jackiw

Para incluir esse vínculo na dinâmica do sistema, aumentamos o espaço de fase adicionando um novo grau de liberdade,

$$\xi^\mu = (\phi^a, \pi_a, u)$$

e estendemos a 1-forma canônica adicionando esse vínculo

$$\theta_1 \equiv \theta + \chi \delta u = \pi_a \delta \phi^a + \chi \delta u$$

calculamos sua derivada exterior funcional e definimos uma nova 2-forma canônica

$$\omega_1 \equiv \delta \theta_1 = \delta \theta + \delta \chi \wedge \delta u = \omega + \frac{\delta \chi}{\delta \xi^\mu} \delta \xi^\mu \wedge \delta u.$$

Método de Faddeev-Jackiw

Se essa nova 2-forma for regular, então a matriz se torna invertível, podemos definir uma estrutura de Poisson

$$\{\xi^\mu(\vec{x}), \xi^\nu(\vec{y})\} \equiv \omega_1^{\mu\nu},$$

onde os parênteses de Poisson envolvendo o grau de liberdade não físico é simplesmente ignorado e os restantes determinam a dinâmica do sistema.

Caso a 2-forma resultante desse processo ainda seja singular, o repetimos iterativamente até que ela se torne regular.

Existe um tipo de sistema vinculado em que esse processo precisa ser ligeiramente modificado, um sistema com **liberdade de gauge** → veremos como isso se dá com o exemplo do campo eletromagnético

O campo eletromagnético

Partimos da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$g = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

calculamos os momentos canônicos

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu}$$

$$\pi_\mu = F_{\mu 0} \begin{cases} \pi_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \\ \pi_0 = F_{00} = 0 \end{cases}$$

→ não depende das coordenadas nem de outros momentos

→ gera uma equação de vínculo

e montamos a Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi_i \pi_i - \pi_i (\partial_i A^0) + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}$$

O campo eletromagnético

Como $\pi_0 = 0$, nossas variáveis canônicas são

$$\xi^\mu = (A^0, A^i, \pi_i)$$

e a 1-forma canônica

$$\theta = \pi_\mu \delta A^\mu = \pi_i \delta A^i + 0 \delta A^0,$$

então

$$\omega = \delta \theta = \delta \pi_i \wedge \delta A^i$$

matricialmente,

$$\omega_{\mu\nu}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \\ \vec{0} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$\det \omega_{\mu\nu} = 0$
a 2-forma canônica é singular.

O campo eletromagnético

Partimos para a primeira iteração do processo, o autovetor dessa matriz com autovalor nulo é

$$X^\mu(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x) \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \rightarrow X^\mu \frac{\delta H}{\delta \xi^\mu} = \alpha \partial_i \pi_i = 0$$

equação de vínculo

O vínculo que encontramos é simplesmente a **lei de Gauss**

$$\partial_i \pi^i = 0$$

lembrando que

$$\pi^i = F^{i0} = E^i \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0}$$

O campo eletromagnético

Aumentando o espaço de fase, adicionamos o vínculo na 1-forma canônica,

$$\theta_1 = \theta + \partial_i \pi_i \delta u,$$

e em seguida calculamos a derivada exterior

$$\omega_1 = \delta\theta_1 = \delta\pi_i \wedge \delta A^i + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \delta\pi_i \wedge \delta u$$

matricialmente,

$$\omega_{1,\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 \\ \vec{0} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & \vec{0} \\ \vec{0} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \nabla \\ 0 & \vec{0} & -\nabla & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$\det \omega_{1,\mu\nu} = 0$
a 2-forma canônica
continua singular.

O campo eletromagnético

Calculamos novamente os autovetores com autovalor nulo dessa matriz

$$X_1^\mu(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla\beta(x) \\ \vec{0} \\ \beta(x) \end{bmatrix} \rightarrow X_1^\mu \frac{\delta H}{\delta\xi^\mu} = \partial_j \beta \partial_i F^{ij} = -\underbrace{\beta \partial_j \partial_i F^{ij}}_{=0} = 0$$

A equação de vínculo é uma identidade:

$$0 = 0$$

então não é possível adicionar na 1-forma.

O campo eletromagnético

Esse problema sempre acontece com sistemas de gauge, pois a Lagrangiana tem uma simetria interna. Mesmo impondo todos os seus vínculos ela continua apresentando degenerescência nas soluções.

Para continuar, precisamos *fixar um gauge*, que iremos impor na 1-forma assim como qualquer vínculo

Gauge de radiação: $A^0 = 0, \nabla \cdot \vec{A} = 0 \implies \begin{cases} \chi_1 = A^0 = 0 \\ \chi_2 = \partial_i A^i = 0 \end{cases}$

Novas variáveis canônicas: $\xi^\mu = (A^0, A^i, \pi_i, u, u_1, u_2)$

1-forma: $\theta_2 = \theta_1 + A^0 \delta u_1 + \partial_i A^i \delta u_2,$

O campo eletromagnético

2-forma canônica:

$$\omega_2 = \omega_1 + \delta A^0 \wedge \delta u_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \delta A^i \wedge \delta u_2$$

em forma matricial,

$$\omega_{2,\mu\nu}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{0} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & \vec{0} & \vec{0} & \nabla \\ \vec{0} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \nabla & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & \vec{0} & -\nabla & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \begin{array}{l} \text{essa matriz é regular} \\ \det \omega_{2,\mu\nu} = [\det(\nabla^2)]^2 \end{array}$$

O campo eletromagnético

Quantização canônica

Para encontrar os parênteses de Poisson, precisamos inverter essa matriz (que contém operadores, portanto sua inversa vai conter funções de Green)

$$[\omega_{2,\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 & -1 & 0 \\ \vec{0} & 0_{3 \times 3} & M_{3 \times 3} & \vec{0} & \vec{0} & -\nabla/\nabla^2 \\ \vec{0} & -M_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -\nabla/\nabla^2 & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & \vec{0} & \nabla/\nabla^2 & 0 & 0 & 1/\nabla^2 \\ 1 & \vec{0} & \vec{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla/\nabla^2 & \vec{0} & -1/\nabla^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad M_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}$$

O campo eletromagnético

Quantização canônica

Temos $\{\xi^\mu, \xi^\nu\} = \omega^{\mu\nu}$,

então ignorando os graus de liberdade não físicos do sistema, os únicos PP não-nulos são

$$\{A^i(\vec{x}, t), \pi_i(\vec{y}, t)\} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

que é exatamente o resultado esperado.

O campo eletromagnético

Quantização funcional

Podemos também fazer a quantização por integral de trajetória a partir desse resultado.

O procedimento consiste em calcular o funcional gerador do sistema (agora regularizado) em um sistema de coordenadas canônico:

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\xi e^{iS[\xi]} = \int \mathcal{D}\xi \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(\xi) \right\}$$

Para fazer a mudança de coordenadas do resultado em que chegamos para um sistema de coordenadas canônico, temos

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \xi' \\ \mathcal{D}\xi &\rightarrow \mathcal{D}\xi' \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}\xi = \left| \det \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi'^\nu} \right| \mathcal{D}\xi'$$

O campo eletromagnético

Quantização funcional

Mas sabemos que

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow \omega'_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi'^\rho}{\partial\xi^\mu} \omega_{\rho\sigma} \frac{\partial\xi'^\sigma}{\partial\xi^\nu}$$

então

$$\det \omega'_{\mu\nu} = \det \left(\frac{\partial\xi'^\rho}{\partial\xi^\mu} \right) \det \omega_{\rho\sigma} \det \left(\frac{\partial\xi'^\sigma}{\partial\xi^\nu} \right)$$

O campo eletromagnético

Quantização funcional

Mas sabemos que

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow \omega'_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi'^\rho}{\partial\xi^\mu} \omega_{\rho\sigma} \frac{\partial\xi'^\sigma}{\partial\xi^\nu}$$

então

$$\underbrace{\det \omega'_{\mu\nu}}_{=1} = \det \left(\frac{\partial\xi'^\rho}{\partial\xi^\mu} \right) \underbrace{\det \omega_{\rho\sigma}}_{[\det(\nabla^2)]^2} \det \left(\frac{\partial\xi'^\sigma}{\partial\xi^\nu} \right)$$

$$\omega'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

O campo eletromagnético

Quantização funcional

portanto

$$\mathcal{D}\xi = \det(\nabla^2)\mathcal{D}\xi'$$
$$Z = \det(\nabla^2) \int \mathcal{D}\xi' \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(\xi') \right\}.$$

Outro detalhe é que para esse procedimento consideramos a *Lagrangiana canônica*

$$\mathcal{L}(\xi) = \theta_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{H},$$

que no espaço de fase aumentado se torna

$$\mathcal{L}(\xi) = \partial_i \pi_i \dot{u} + \pi_i \dot{A}^i + A^0 \dot{u}_1 + \partial_i A^i \dot{u}_2 - \frac{1}{2} \pi_i \pi_i - \pi_i (\partial_i A^0) + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}.$$

O campo eletromagnético

Quantização funcional

Utilizando a identidade do delta de Dirac funcional,

$$\delta[g] = \int \mathcal{D}f \exp \left\{ -i \int d^4x f g \right\},$$

integrando nos momentos e fazendo um bocado de manipulação, resulta

$$Z = \mathcal{N} \det(\nabla^2) \int \mathcal{D}A^\mu \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right\} \delta[\partial_i A^i],$$

que tem a forma

$$Z = \mathcal{N} \det(\nabla^2) \int \mathcal{D}A^\mu e^{iS} \delta[G_{gauge}],$$

a mesma encontrada em Peskin and Schroeder, pg 296, porém com o gauge de Lorentz.

Referências

1. R. D. Matheus. Notas de aula: Teoria Quântica de Campos I
2. H. Nastase. “Introduction do Quantum Field Theory”. Cambridge University Press, 2020. ISBN: 9781108493994
3. M. Peskin, D. Schroeder. “An Introduction to Quantum Field Theory”. Westview Press, 1995. ISBN: 139780201503975
4. J. José; E. Saletan. “Classical dynamics - A contemporary approach”. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 0521631769.
5. L. Faddeev; R. Jackiw. “Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems”. Em: Physical Review Letters 60.17 (1988), pp. 1692–1694. DOI:10.1103/physrevlett.60.1692.
6. J. Barcelos-Neto; C. Wotzasek. “Faddeev Jackiw Quantization and Constraints”. Em: International Journal of Modern Physics 7.20 (1992), pp. 4981–5003. DOI: 10.1142/s0217751x9200226x.
7. L.G. Caro Mendoza. “Estrutura simplética em sistemas singulares à la Faddeev-Jackiw”. Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo: (Mestrado em Física), 2020.
8. L.G. Caro Mendoza. “Da teoria clássica à quântica de campos através da abordagem de Faddeev-Jackiw”. 2024.Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São Paulo, 2024
9. M. C. Bertin; B. M. Pimentel. “Symplectic quantization of the BF gravity in 1+1 dimensions”. Em: International Journal of Modern Physics A 40.24 (2025). DOI: 10.1142/S0217751X25500988.



Muito obrigado!

