Supersimetria e Renormalização

Alef Ruela Siqueira

01/07/2025

Introdução

- Supersimetria: extensão do grupo de Poincaré.
- Introduz geradores fermiônicos Q_α.
- Algebra básica:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \tag{1}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{2}$$

Número de estados

Para representações de dimensão finita:

$$Tr((-1)^{N_F}) = n_B - n_F. \tag{3}$$

Operador número fermiônico:

$$(-1)^{N_F}|B\rangle = |B\rangle, \quad (-1)^{N_F}|F\rangle = -|F\rangle. \tag{4}$$

Demonstração

Natureza fermiônica de Q_α implica:

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-1)^{N_F}. \tag{5}$$

Logo,

$$Tr((-1)^{N_F}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}) = Tr((-1)^{N_F} 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu) = 0. \tag{6}$$

Portanto $n_B = n_F$.

Ação de Dirac para Espínores

A ação de Dirac para espínores é dada por:

$$S_F = -i \int d^4x \left(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} i \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial_m \psi_\beta + \frac{iM}{2} (\psi^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \right) \quad (7)$$

Isso leva às equações de movimento:

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial_m \psi_\beta = iM \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad \sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} \partial_m \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = iM \psi_\alpha \quad (8)$$

$$\Box \psi^\alpha = M^2 \psi^\alpha \quad (9)$$

Graus de Liberdade e Ação Bosônica

Das EOM, restam dois graus de liberdade físicos:

$$\psi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \Rightarrow 2 \text{ g.l.} \tag{10}$$

Para igualar aos graus de liberdade férmicos, usamos um escalar complexo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$.
Ação bosônica:

$$S_B = -\int d^4x \left[\partial_m \varphi \partial^m \bar{\varphi} + M^2 \varphi \bar{\varphi}\right] \tag{11}$$

Equações de Movimento

As equações de movimento para os campos bósônicos são:

$$\Box\varphi = M^2\varphi, \quad \Box\bar{\varphi} = M^2\bar{\varphi} \tag{12}$$

A ação total:

$$S = S_B + S_F \tag{13}$$

é invariante sob transformações supersimétricas.

Espinor de Dirac em 4D:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \psi_\alpha : (\frac{1}{2}, 0) \text{ — Weyl espinor esquerdo} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} : (0, \frac{1}{2}) \text{ — conjugado de Weyl direito} \end{cases}$$

Caso Majorana:

$$\chi_\alpha = \psi_\alpha \quad \Rightarrow \quad \Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$(\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$$

Matrizes de Pauli $\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}}$:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Relação entre $\bar{\sigma}^m$ e σ^m:

$$\bar{\sigma}^{m\,\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon^{\beta\delta}\,\sigma^m_{\delta\dot{\gamma}} \quad (15)$$

Transformação entre ξ_α e ξ^β:

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta \quad , \quad \xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta \tag{16}$$

com

$$-\varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon^{21} = 1 \quad , \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$$

e

Transformações SUSY

Sob os parâmetros SUSY $\xi^{\alpha}, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$, os campos transformam como:

$$\delta_Q \varphi = \sqrt{2}\xi^{\alpha}\psi_{\alpha}, \quad \delta_Q \bar{\varphi} = \sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{17}$$

$$\delta_Q \psi_{\alpha} = i\sqrt{2}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_m \varphi - \sqrt{2}M\bar{\xi}_{\alpha} \tag{18}$$

$$\delta_Q \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\xi_{\alpha}\partial_m \bar{\varphi} - \sqrt{2}M\xi^{\dot{\alpha}} \tag{19}$$

Onde:

$$\delta_Q = \xi^{\alpha}Q_{\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \tag{20}$$

$$[\delta_{\eta}, \delta_{\xi}] = -2i\left(\eta\sigma^{\mu}\bar{\xi} - \xi\sigma^{\mu}\bar{\eta}\right)\partial_{\mu}. \tag{21}$$

Álgebra SUSY: On-Shell

O comutador de transformações SUSY gera uma translação:

$$\delta^1_Q, \delta^2_Q]\varphi = 2i(\xi_1\sigma^m\bar{\xi}_2 - \xi_2\sigma^m\bar{\xi}_1)\partial_m\varphi = 2\delta_P\varphi \tag{22}$$

Similarmente, para ψ_α, até termos que anulam on-shell:

$$[\delta^1_Q, \delta^2_Q]\psi_\alpha = 2\delta_P\psi_\alpha + \text{termos on-shell} \tag{23}$$

Portanto, a álgebra SUSY fecha **on-shell**.

Equações com Campos Auxiliares

$$S = \int d^4x \Big[-\partial_m\varphi\,\partial^m\bar{\varphi} - i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^n)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_n\psi_\beta + F\bar{F} +$$

$$+ M\big(\varphi F + \bar{\varphi}\bar{F} - \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\big)\Big] \quad (24)$$

Dessa ação:

$$\Box\varphi = -MF, \quad \Box\bar{\varphi} = -M\bar{F}, \quad F = -M\varphi, \quad \bar{F} = -M\bar{\varphi} \quad (25)$$

$$\sigma^m\partial_m\bar{\psi} = iM\psi, \quad \bar{\sigma}^m\partial_m\psi = iM\bar{\psi} \quad (26)$$

Logo, $\Box\varphi = M^2\varphi$, mostrando que $F, \bar{F}$ são auxiliares.

Transformações SUSY: Off-Shell

Agora:

$$\delta_Q \psi_\alpha = i\sqrt{2}(\sigma^m \bar{\xi})_\alpha \partial_m \varphi + \sqrt{2}\xi_\alpha F \tag{27}$$

$$\delta_Q F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m \partial_m \psi \tag{28}$$

e similarmente para $\bar{\psi}, \bar{F}$. Isso garante que a álgebra SUSY fecha:

$$[\delta_Q^1, \delta_Q^2]\psi_\alpha = \delta_P \psi_\alpha \tag{29}$$

Estendemos as coordenadas de Minkowski x^m para $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ e definimos:

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \quad \bar{y}^m = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta} \tag{30}$$

Supercampos quirais:

$$\Phi(y,\theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(y) + \theta^\alpha\theta_\alpha F(y) \tag{31}$$

$$\bar{\Phi}(\bar{y},\bar{\theta}) = \bar{\varphi}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(\bar{y}) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{F}(\bar{y}) \tag{32}$$

$$\delta x^m = -i(\xi\sigma^m\bar{\theta} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\theta), \quad \delta\theta^\alpha = \xi^\alpha, \quad \delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \delta y^m = -2i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\theta, \quad \delta\bar{y}^m = -2i\xi\sigma^m\bar{\theta} \tag{34}$$

Os geradores de supersimetria são:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m}, \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{35}$$

Para a mudança de coordenadas $(x, \theta, \bar{\theta}) \to (y, \theta, \bar{\theta})$, temos:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - 2i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial y^m} \tag{36}$$

Para a transformação $(x, \theta, \bar{\theta}) \to (\bar{y}, \theta, \bar{\theta})$:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^m}, \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \tag{37}$$

Definimos a seguinte integral:

$$\int d^4\theta \, f(x,\theta,\bar{\theta}) = \int d^4\theta \left(A(x) + \theta B(x) + \cdots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x)\right) \equiv D(x) \tag{38}$$

ou equivalentemente:

$$\int d^4\theta \, f = \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} f\right)\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \tag{39}$$

Ação Cinética em Superespaço

Propomos que a seguinte integral fornece a parte cinética do modelo de Wess-Zumino:

$$\int d^4\theta\, \Phi(y,\theta)\bar{\Phi}(\bar{y},\bar{\theta}) = \int d^4\theta\, \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\theta},\theta)\, \bar{\Phi}(x - i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) \tag{40}$$

Expansão da Supercampo Φ

Expandindo:

$$\Phi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta) = \varphi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\varphi + \frac{1}{2}(i\theta\sigma^m\bar{\theta})^2\partial_m\partial_n\varphi$$
$$+\sqrt{2}\theta\psi + i\sqrt{2}\theta^\alpha(\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m\psi_\alpha + \theta\theta F + \cdots \tag{41}$$

$$\bar{\Phi}(x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) = \bar{\varphi}(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\bar{\varphi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{\varphi} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\bar{\psi}\sigma^m\bar{\theta} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F} \tag{42}$$

Resultado Final

$$\int d^4\theta\, \Phi\bar{\Phi} = F\bar{F} + \frac{1}{4}(\varphi\Box\bar{\varphi} + \bar{\varphi}\Box\varphi) - \frac{1}{2}\partial_m\varphi\partial^m\bar{\varphi}$$

$$-\frac{i}{2}\left(\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} - \partial_m\psi\sigma^m\bar{\psi}\right) \tag{6.10}$$

$$\int d^4x \int d^4\theta\, \Phi\bar{\Phi} = \int d^4x\, (-\partial_m\varphi\partial^m\bar{\varphi} - i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + F\bar{F}) \tag{6.11}$$

Motivação: Derivadas Fermiônicas

Queremos construir derivadas covariantes sob supersimetria, ou seja, derivadas que anticomutam com os geradores supersimétricos Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$:

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{43}$$

Isso nos permite definir objetos "invariantes" ou "covariantes" sob SUSY, essenciais para escrever ações supersimétricas.

Definição das Derivadas Fermiônicas

Em coordenadas usuais $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, definimos:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{44}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{45}$$

Transformações de Coordenadas

Ao passar para coordenadas $(y^m, \theta, \bar{\theta})$, com:

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \tag{46}$$

As derivadas se simplificam:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{47}$$

De forma análoga, em coordenadas $\bar{y}^m = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i\theta^\beta\sigma^m_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^m} \tag{48}$$

Campos Quirais e Anti-quirais

Usamos as derivadas para definir os supercampos quirais:
- Um supercampo Φ é quiral se:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{49}$$

- Um supercampo $\bar{\Phi}$ é antiquiral se:

$$D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0 \tag{50}$$

Essas condições garantem que os supercampos dependem apenas de $(y^m, \theta\ )$ ou $(\ \bar{y}^m, \bar{\theta})$ e facilitam a construção de integrais quirais como:

$$\int d^2\theta\, f(\Phi), \quad \int d^2\bar{\theta}\, \bar{f}(\bar{\Phi}) \tag{51}$$

Termo de Massa

$$S_{\text{massa}} = \frac{M}{2}\int d^4x \left(\int d^2\theta\, \Phi^2 + \int d^2\bar{\theta}\, \bar{\Phi}^2 \right)$$
$$= M \int d^4x \left(\varphi F - \frac{1}{2}\psi\psi + \bar{\varphi}\bar{F} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi} \right) \tag{52}$$

Invariância SUSY da Integral Quiral

Se f é um supercampo **quiral** ($\bar{D}_{\dot{\alpha}} f = 0$), então a seguintes integrais são supersimétricas:

$$\delta \left(\int d^4x \int d^2\theta \, f(\Phi) \right) = 0 \tag{53}$$

$$\delta \left(\int d^4x \int d^2\bar{\theta} \, f(\bar{\Phi}) \right) = 0 \tag{54}$$

Demonstração:

$$\delta\left(\int d^4x \int d^2\theta\, f(\Phi)\right) = \int d^4x \int d^2\theta\,(\delta f)$$

$$= \int d^4x \int d^2\theta \left[\xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) + \bar\xi_{\dot\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\bar\sigma^{m\dot\alpha\beta}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right] f$$

$$= \int d^4x \int d^2\theta \left[\xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) + \bar\xi_{\dot\alpha}\left(\bar D^{\dot\alpha} - 2i\bar\sigma^{m\dot\alpha\beta}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right] f$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4x \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\right)\left(\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} f - \text{termos de contorno}\right)\right] = 0$$

De fomrma similar,

$$\delta\left(\int d^4x \int d^2\bar\theta\, f(\bar\Psi)\right) = 0$$

Ação Supersimétrica Geral

$$S = \int d^4x \left[\int d^4\theta\, \Phi\bar{\Phi} + \int d^2\theta \left(\frac{M}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3 \right) + \int d^2\bar{\theta} \left(\frac{M}{2}\bar{\Phi}^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{g}{3}\bar{\Phi}^3 \right) = \int d^4x \left[-\partial_m\varphi\partial^m\bar{\varphi} - i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + F\bar{F} + \cdots \right] \qquad (55)$$

Teorema de Não-Renormalização

Modelo de Wess-Zumino para n supercampos quirais Φ_a, com superpotencial $W(\Phi_a)$:

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \bar{\Phi}_a \Phi_a + \int d^4x\, d^2\theta\, W(\Phi_a) + \text{h.c.} \tag{56}$$

$$\tilde{S} = \int d^4x\, d^4\theta\, Z_{ab}\, \bar{\Phi}_a \Phi_b + \int d^4x\, d^2\theta\, Y\, W(\Phi_a) + \text{h.c.} \tag{57}$$

$$\tilde{S}_\lambda = \int d^4x\, d^4\theta\, K(\bar{\Phi}_a \Phi_a, Z_{ab}, Y, \bar{Y}) + \int d^4x\, d^2\theta\, W_\lambda(\Phi_a, Y) + \text{h.c.} \tag{58}$$

A holomorfia e a simetria R exigem que o superpotencial efetivo tenha a forma:

$$W_\lambda(\Phi_a, Y) = Y\, W(\Phi_a) \tag{59}$$

Assim, concluímos:

$$W_\lambda(\Phi_a) = W(\Phi_a) \tag{60}$$

Lagrangiana em Supercampos

Modelo de Wess-Zumino:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \; \bar{\Phi}\,\Phi + \left[\int d^2\theta \left(\frac{1}{2} m\,\Phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\,\Phi^3\right) + \text{h.c.}\right] \tag{61}$$

- A única parte que gera divergências UV é $\int d^4\theta \; \bar{\Phi}\Phi$.
- O superpotencial não renormaliza!

A Lagrangiana do modelo Wess-Zumino é:

$$\int d^4x \left[-\partial_m\varphi\,\partial^m\bar{\varphi} - i\,\psi\,\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + F\bar{F} + \lambda F + \right.$$
$$+M\left(\varphi F - \frac{1}{2}\psi\psi\right) + g\left(\varphi^2 F - \psi^\alpha\psi_\alpha\varphi\right) + \bar{\lambda}\bar{F}$$
$$\left. +\bar{M}\left(\bar{\varphi}\bar{F} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}\right) + \bar{g}\left(\bar{\varphi}^2\bar{F} - \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\varphi}\right) \right] \tag{62}$$

Equações de Movimento e Ação Eficaz

Equações de Movimento:

$$-\Box\bar{\varphi} = MF + 2g\varphi F - g\psi\psi \tag{63}$$

$$-\Box\varphi = \bar{M}\bar{F} + 2\bar{g}\bar{\varphi}\bar{F} - \bar{g}\bar{\psi}\bar{\psi} \tag{64}$$

$$-i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = M\psi_\alpha + 2g\varphi\psi_\alpha \tag{65}$$

$$-i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\partial_m\psi_\alpha = \bar{M}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + 2\bar{g}\bar{\varphi}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{66}$$

$$\bar{F} = -\lambda - M\varphi - g\varphi^2 \tag{67}$$

$$F = -\bar{\lambda} - \bar{M}\bar{\varphi} - \bar{g}\bar{\varphi}^2 \tag{68}$$

Implica:

Ação do Modelo

$$S = \int d^4x \left[-\partial_m \varphi \, \partial^m \bar{\varphi} - i\psi\sigma^m \partial_m \bar{\psi} - \frac{1}{2} M\psi\psi - \frac{1}{2} \bar{M} \, \bar{\psi}\bar{\psi} \right.$$
$$\left. -g\psi\psi\varphi - \bar{g} \, \bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\varphi} - V(\varphi, \bar{\varphi}) \right] \tag{71}$$

Potencial do Modelo

O potencial é:

$$V(\varphi, \bar{\varphi}) = \left|\lambda + M\,\varphi + g\,\varphi^2\right|^2 . \tag{72}$$

Expandindo:

$$\begin{aligned} V = {} & |\lambda|^2 + \lambda \bar{M} \bar{\varphi} + \bar{\lambda} M \varphi + \lambda \bar{g} \bar{\varphi}^2 + \bar{\lambda} g \varphi^2 \\ & + |M|^2 \varphi \bar{\varphi} + M \bar{g} \varphi \bar{\varphi}^2 + \bar{M} g\, \bar{\varphi} \varphi^2 + |g|^2\, \varphi^2 \bar{\varphi}^2 . \end{aligned} \tag{73}$$

Renormalização das Funções de Onda

Renormalização

$$\varphi \to Z_\varphi^{1/2}\,\varphi, \quad \psi \to Z_\psi^{1/2}\,\psi \tag{74}$$

Precisamos calcular:

- Correção ao propagador de φ
- Correção ao propagador de ψ

Renormalização das Funções de Onda

$$S = \int d^4x - \partial_m\varphi\,\partial^m\bar{\varphi} - i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} - \delta Z_\varphi\partial_m\varphi\,\partial^m\bar{\varphi} - \delta Z_\psi i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} +$$

$$-g\psi\psi\varphi - \bar{g}\bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\varphi} - g\varphi^2\bar{\varphi}^2 \tag{75}$$

para

$$M = \lambda = 0 \tag{76}$$

Existem dois diagramas 1-loop que corrigem o propagador do escalar:

1. **Loop escalar:** interação quartica $\varphi^2\bar{\varphi}^2$.

2. **Loop fermiônico:** duas interações $g\,\psi\psi\varphi$ e $\bar{g}\,\bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\varphi}$.

Loop Escalar

Temos os seguinte diagrama:

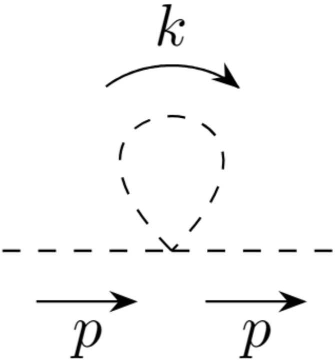

Figure: Correção do campo escalar

Loop Escalar (Quartico)

Integral correspondente:

$$\Sigma_{\varphi}^{(\text{scalar})}(p) = (-i|g|^2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2}.$$

Simplificando:

$$\Sigma_{\varphi}^{(\text{scalar})}(p) = |g|^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}.$$

Valor do Loop Escalar (DRED)

Na redução dimensional (DRED):

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \text{const} \right).$$

Portanto:

$$\Sigma_{\varphi}^{(\text{scalar})}(p) = |g|^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}.$$

$$\delta Z_{\varphi} = \frac{d}{dp^2} \Sigma_{\varphi}(p^2) \bigg|_{p^2=0}. = 0$$

Não gera termo proporcional a p^2.

Loop de Férmions Fermiônico

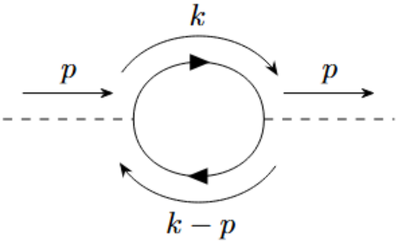

Figure: Correção do campo escalar

Loop Fermiônico

Autoenergia:

$$-i\,\Pi(p^2) = (-1) \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \mathrm{Tr}\left[(-ig)\,\frac{i\,k}{k^2}\,(-ig)\,\frac{i\,(k-p)}{(k-p)^2}\right].$$

Fazendo a redução dimensional, temos como resultado

$$\Pi(p^2) = -2\, g^2\, p^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{k^2\,(k-p)^2}.$$

No esquema de Dimensional Reduction (DRED), vale:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2\,(k-p)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2} + \cdots\right).$$

Logo,

Loop Fermiônico - Valor

$$\Pi(p^2) = -2\,g^2\,p^2 \times \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2} + \cdots\right) =$$
$$= -\frac{g^2}{8\pi^2}\,p^2\left(\frac{1}{\epsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2} + \cdots\right). \tag{77}$$

Portanto,

$$\delta Z_\varphi = \frac{d}{dp^2}\Pi(p^2)\bigg|_{p^2=0} = -\frac{g^2}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{\epsilon} \tag{78}$$

Loop no Propagador de ψ

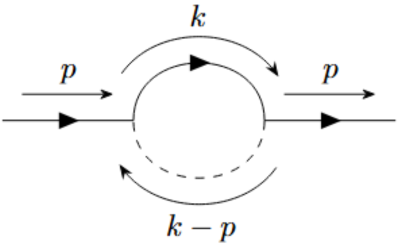

Figure: Correção do campo fermionico

Autoenergia de ψ no Wess-Zumino (DRED)

Amplitude:

$$-i\,\Sigma(p) = (-ig)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\;\frac{i\,k}{k^2}\;\frac{i}{(p-k)^2}$$

Resultado (DRED):

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{8\pi^2}\;p\left(\frac{1}{\epsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2} + \cdots\right)$$

Logo:

$$\delta Z_\psi = -\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{1}{\epsilon}.$$

Conclusão

- O férmion ψ **renormaliza a 1-loop.**
- Há divergência proporcional a p.
- Não há cancelamento entre loops escalar e fermiônico para δZ_ψ.
- Isso é consistente com supersimetria:

$$Z_\varphi = Z_\psi$$

- Portanto:

$$\delta Z_\varphi = \delta Z_\psi$$

no nível 1-loop.

Cancelamentos

Cancelamento de divergências:
Nos diagramas de 1-loop com pernas externas de campos escalares ou férmions, as divergências do tipo:

$$\Sigma(p) \sim \frac{|g|^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}p \quad \text{ou} \quad p^2$$

são precisamente absorvidas pelos contratermos δZ_ψ e δZ_φ, garantindo a finitude das amplitudes físicas.

Conclusão:

- A supersimetria exige $Z_\psi = Z_\varphi$, e verificamos isso explicitamente.
- Todos os resíduos divergentes são removidos pelos δZ, conforme esperado pela estrutura não-renormalizável dos termos SUSY.
- A consistência do modelo Wess–Zumino com DRED e regularização mínima está preservada a 1-loop.

Referências Bibliográficas

- Nathan Berkovits. *SUSY Lectures 2*.
- Jan Louis. *Supersymmetry Lecture Notes*. 2015. Disponível em: `https://www.physik.uni-hamburg.de/th2/ag-louis/dokumente/lectures/ws-15-16/ws-15-susy-lecture-notes.pdf`
- Julius Wess, Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. 2nd ed., Princeton University Press, 1992.