Quebra espontânea de simetria e teorema de Goldstone

Gabriel V. Vian
gabriel.vian@unesp.br

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

June 30, 2025

Motivação

- Quebra espontânea de simetria (SSB) tem grande importância em muitas áreas da física, e.g.: mec. estatística, teoria das interações fracas no SM (promovendo massa ao boson de Higgs!) estudo de novos modelos BSM, entre outros.
- Em QFT a SSB leva a um importante resultado: o teorema de Goldstone

Estrutura

Nesse seminário veremos uma Introdução à SSB, seguida de um exemplo instrutivo e finalizaremos vendo o Teorema de Goldstone.

1. Introdução
2. Quebra espontânea de simetria.
3. Modelo sigma linear
4. Teorema de Goldstone

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Quebra espontânea de simetria.

Exemplo inicial

A fim de introduzir o conceito de SSB vamos estudar um caso simples: A teoria $\lambda\phi^4$ cuja lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

onde: ϕ é um campo escalar real, λ é uma constante de acoplamento positiva e μ é um parâmetro com unidades de energia e $\mu^2 > 0$.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

A lagrangiana é simétrica sob a transf. de reflexão $\phi \to -\phi$, do grupo de transf. discretas $\mathbb{Z}_2$.

Além disso, o termo $\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ é o potencial desta lagrangiana.

Vale lembrar também que essa lagrangiana é clássica, mas podemos quantizar ela depois.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

Esse potencial, dado por

$$V(\phi) = \mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

E possui um mínimo em $\phi_0 = \pm\mu\left(\frac{6}{\lambda}\right)^{1/2} \equiv \pm v$

Mesmo após a quantização o v (que chamaremos de vev – vacum expectaction value) permanece o mesmo que no caso clássico (a nível árvore).

Importante : o estado ϕ_0, assim como qualquer $\phi \neq 0$, não obedece a mesma simetria da lagrangiana, i.e.: $\phi \neq -\phi$.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

Para interpretar essa teoria vamos supor que o sistema esteja próximo ao mínimo positivo $\phi_0 = +\mu \left(\frac{6}{\lambda}\right)^{1/2}$

Podemos escrever $\phi(x)$ como uma excitação próximo a esse mínimo, que é o vácuo da teoria:

$$\phi = v + \sigma(x)$$

onde $\sigma(x)$ é um campo cujo valor esperado é nulo $\langle\Omega|\,\sigma\,|\Omega\rangle$.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

Agora a lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}(2\mu^2)}_{m_\sigma^2} \sigma^2 - \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{1/2} \mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4$$

Veja que com isso ganhamos algumas coisas

- O aparecimento de um termo de massa para o campo σ
- Interações σ^3 & σ^4

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

Agora a lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}(2\mu^2)}_{m_\sigma^2}\sigma^2 - \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{1/2}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4$$

Além disso

- A simetria original da lagrangiana $\phi \to -\phi$ não está mais aparente, dizemos que ela foi espontanemanete quebrada, pela nossa mudança de variável.
- A simetria pode ser recuperada se nos encontrarmos a transformação correta para σ que é $\sigma \to -\sigma - 2v$.

Trata-se do exemplo mais simples de SSB.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Exemplo inicial

A Quebra espontânea de simetria é um fenômeno em que as equações que governam um sistema físico possuem uma simetria, mas o estado fundamental do sistema não a respeita.

Note que a quebra se torna evidente uma que reescrevemos o campo original (solução da lagrangiana) em termos de um estado do sistema (configuração de mínima energia potencial do campo) que não obedece a mesma simetria da lagrangiana original.

A simetria é "quebrada" espontaneamente pelo próprio sistema, sem intervenção externa.

Podemos esquematizar esse procedimento da seguinte forma

Lagrangiana Original
$\mathcal{L}(\phi)$ com simetria
(exemplo: $\phi \to -\phi$)

$$\Downarrow$$

Mudança de variável: $\phi = (\sigma + v)$
usando o vev de um estado que não obedece as mesmas simetrias que $\mathcal{L}$

$$\Downarrow$$

Campos em torno do VEV
$\mathcal{L}(\phi) \to \mathcal{L}(\sigma + v)$

$$\Downarrow$$

SSB (Quebra Espontânea de Simetria)
Aparecimento de termo de massa para σ

$$\Downarrow$$

Simetria Original Persiste
Simetria "escondida" - transformação correta de σ restaura a simetria

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Modelo sigma linear.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2$$

Modelo sigma linear

Uma teoria mais interessante é da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i (\partial_\mu \phi^i(x))^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \sum_i (\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[\sum_i (\phi^i)^2\right]^2 \tag{1}$$

Ou, assumindo soma implícita sobre o índice i

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2 \tag{2}$$

Essa é a lagrangiana da teoria sigma linear,e aqui estamos considerando um conjunto de campos escalares : $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$.

Modelo sigma linear

Essa lagrangiana é simétrica às transformações do grupo O(N) (rotações + reflexões). Vamos usar ela como exemplo, mas os resultados obtidos aqui valém para quaisquer grupos.
Uma transformação **global e contínua** desse grupo sobre um campo ϕ^i tem a forma:

$$\phi'^i = R^{ij}\phi^j$$

onde R^{ij} é uma matriz $N \times N$.

Modelo sigma linear

Novamente, a configuração clássica de energia mínima é obtida minimizando

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \sum_i (\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}\left[\sum_i (\phi^i)^2\right]^2 \tag{3}$$

que pode ser satisfeita por qualquer campo ϕ_0^i, tal que

$$\left(\phi_0^i\right)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \tag{3}$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Modelo sigma linear

Podemos pensar que nosso conjunto de campos $\{\phi^i\}$ formam um vetor $\phi = (\phi^1, ..., \phi^N)$. O mesmo para o estado de menor energia ϕ_0 ($\phi_0 = (\phi_0^1, ..., \phi_0^N)$).

A condição (3) determina o comprimento do campo ϕ_0 cujo direção é arbitrária.

Então, podemos fazer uma escolha de coordenadas tal que $\phi_0^j = 0\,, j \neq N$, assim $\phi_0 = (0, 0, 0, ..., v)$.

Assim, seguindo a prescrição de quebra espontânea de simetria, podemos escrever o N-ésimo campo como uma excitação próxima ao v.e.v.:

$$\phi^N = v + \sigma(x), \quad \langle\Omega|\sigma|\Omega\rangle = 0 \tag{6}$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Modelo sigma linear

Além disso, fazemos uma mudança de variável para todos os campos, menos o último:

$$\phi^k(x) \to \pi^k(x), \quad k \neq N$$

Assim:

$$\phi = \left(\pi^k(x), \sigma(x) + v\right) \tag{7}$$

Reescrevendo a $\mathcal{L}$ (2) usando (6) e (7):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_k(\partial_\mu\pi^k(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma(x))^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2$$
$$- \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu\sum_k{}'(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}\sum_k{}'(\pi^k)^2\sigma^2$$
$$- \frac{\lambda}{4}\left[\sum_k(\pi^k(x))^2\right]^2 \tag{8}$$

Modelo sigma linear

Assim como no caso do teoria $\lambda\phi^4$ mais simples, obtivemos um campo massivo σ. Mas agora obtivemos um conjunto de $N-1$ $\pi^k(x)$ campos sem massa, algo que não foi evidenciado no caso do $\lambda\phi^4$ simples.

Isso decorre de fato que as sims. quebradas foram de um grupo de transf. globais & contínuas.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Modelo sigma linear

Essa SSB mantém a sim. original $O(N)$ escondida na lagrangiana (8), e esta ainda é invariante sob as transf. do grupo $O(N-1)$ que rodam os campos π^k. Então a sim. de O(N) agora está escondida pela SBB, mas há uma simetria explicita de O(N-1) pros campos π^k.

Modelo sigma linear

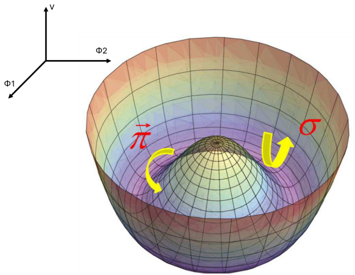
Para interpretar esses campos pós-SSB vamos pensar no seguinte caso – que pode ser generalizado p/ N dim. :
Considere $N = 2$, então temos

$$\begin{cases} \phi^1 = \pi^1 \\ \phi^2 = \sigma + v \end{cases}$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Modelo sigma linear

A interpretação é que redefinimos o campo em torno do estado de menor energia, e então a Lagrangiana em termos do novo campo descreve a física na vizinhança do vácuo, que é onde o sistema realmente se encontra. Observando o plot de $V(\phi_1, \phi_2)$ observamos que



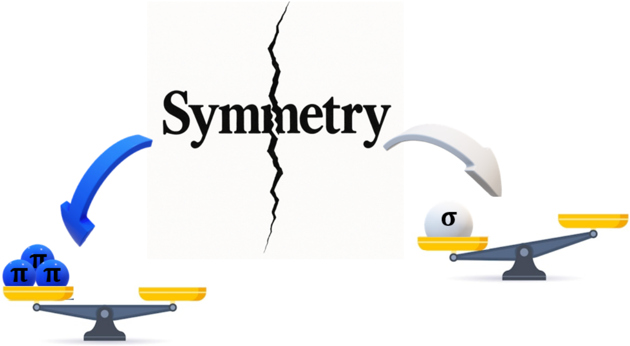
o campo sem massa π^1 descreve rotações no "fundo do chapéu", que custam zero energia. Ele consegue "andar" livremente na direção circular (no vale), enquanto o campo $\sigma(x)$ pode oscilar na direção para fora do vale (direção radial), saindo do mínimo para direções com energia maior. Essas oscilações custam energia, que corresponde à massa do campo.

Modelo sigma linear

Em N dim., os campos π^k "andam" em $N-1$ dim., tangenciais à direção de oscilação do campo σ.

Na sequencia, vamos entender qual a relação do aparecimento desses campos sem massa com a SSB.

Teorema de Goldstone



Teorema de Goldstone

Esse aparecimento de partículas sem massa quando uma simetria contínua é quebrada se chama de teorema de Goldstone, e é um resultado geral.
Ele vale para qualquer grupo de simetria, mas para esse caso vamos falar somente do grupo $O(N)$.

Grupo $O(N) \rightarrow \frac{N(N-1)}{2}$ geradores (simetrias contínuas). Para esse grupo, cada gerador corresponde a um plano independente de rotação.

e.g.: para N $= 3$ os geradores (contínuos) são:

$$\# \text{ geradores} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

$$\text{que são: } \begin{cases} L_x & \rightarrow \text{ rotação no plano } yz \text{ } (\text{rot}(y,z)) \\ L_y & \rightarrow \text{ rot}(x,z) \\ L_z & \rightarrow \text{ rot}(x,y) \end{cases}$$

A reflexão não tem gerador contínuo, pois é uma transf. discreta.

Teorema de Goldstone

Após o SSB do $\mathcal{L}$ de que respeita as simetrias de O(N), restam

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2}$$

geradores não quebrados.
O número de simetrias *quebradas* é $N-1$, que se associam a N-1 bósons de Goldstone associados aos campos π.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

No caso de O(3), nosso exemplo com 3 geradores originais:

- Temos 2 geradores (simetrias) quebradas associados a dois campos π,
- 1 gerador não quebrado associado a um único plano de rot., p/ os campos π (Lembre-se que : os campos π^k "andam" em $N-1$ dim., tangenciais à direção de oscilação do campo σ.)

O teorema de Goldstone estabelece então que, para cada simetria contínua espontaneamente quebrada, irá aparecer uma partícula sem massa (bóson de Goldstone) associada a um campo π.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

Uma prova
Considere uma teoria envolvendo uma Lagrangiana $\mathcal{L}$ com vários campos $\phi^a(x)$.

$$\mathcal{L} = (\text{termos com derivadas}) - V(\phi)$$

$\mathcal{L}$ depende de todos os campos.
Seja ϕ_0^a um campo que minimiza $V(\phi)$, tal que:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right|_{\phi^a = \phi_0^a} = 0$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

Expandindo V ao redor desse mínimo, até ordem ϕ^2 (Somas escondidas nos indices a e b repetidos.) :

$$V = V(\phi_0) + \left.\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right|_{\phi=\phi_0} (\phi^a(x) - \phi_0^a) + \frac{1}{2}(\phi^a(x) - \phi_0^a)(\phi^b(x) - \phi_0^b)\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\right|_{\phi=\phi_0}$$

Mas como:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right|_{\phi=\phi_0} = 0$$

A expansão fica:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}\sum_{a,b}(\phi^a(x) - \phi_0^a)(\phi^b(x) - \phi_0^b)\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\right|_{\phi=\phi_0} + \dots$$

O termo de segunda derivada forma uma matriz simétrica de dimensão $N \times N$:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^1 \partial \phi^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^N \partial \phi^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^N \partial \phi^N} \end{pmatrix}\right|_{\phi=\phi_0}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^1 \partial \phi^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^N \partial \phi^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^N \partial \phi^N} \end{pmatrix}\right|_{\phi=\phi_0} = m_{N\times N}$$

Essa matriz é chamada de matriz de massa do sistema cujos autovalores $\{\lambda\}$ nos dão as massas dos campos da teoria.

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^a(\phi-\phi_0)^b \underbrace{\left.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\right)\right|_{\phi_0}}_{=m_{ab}} + \ldots$$

Teorema de Goldstone

O teo. de Goldstone diz que geradores quebrados dão origem à campos sem massa.
Para provar o teorema, queremos mostrar que toda sim. contínua de $\mathcal{L}$ que não é uma sim. do estado fundamental (ϕ_0^a), dá origem a um autovalor zero para a matriz de massas do sistema
Com isso podemos atualizar o nosso esquema de antes:

Lagrangiana Original
$\mathcal{L}(\phi)$ com simetria continua

$\Downarrow$

Mudança de variável: $\phi^i = (\sigma + v), \quad \phi^k = \pi^{k \neq i}$
usando o vev de um estado que não obedece as mesmas simetrias que $\mathcal{L}$

$\Downarrow$

cada sim. não respeitada pelo estado fundamental vai resultar em um autovalor nulo para m_{ab} $\rightarrow$ um boson de Goldstone.

$\Downarrow$

Campos em torno do VEV
$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\sigma + v, \pi^k)$

$\Downarrow$

SSB (Quebra Espontânea de Simetria)
Aparecimento de termo de massa para σ + k campos π sem massa

$\Downarrow$

Simetria Original Persiste
Simetria "escondida" - transformação correta de σ e π^k restaura a simetria

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

Considere a seguinte transformação nos campos que deixa $\mathcal{L}$ invariante:

$$\phi^a \to \phi^{a'} = \phi^a + \alpha\,\Delta^a(\phi)$$

α: parâmetro infinitesimal Δ^a: função dos campos

Se

$$\mathcal{L}(\phi^{a'}) = \mathcal{L}(\phi^a)$$

Então

$$\partial_\mu(\cdots)|_{\phi^a \to \phi^{a'}} + V(\phi^{a'}) = \partial_\mu(\cdots) + V(\phi^a)$$

Mas vamos focar somente nos termos de potencial:

$$V(\phi^{a'}) = V(\phi^a)$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

$$\Rightarrow \quad V\left(\phi^a + \alpha\, \Delta^a(\phi)\right) = V(\phi^a)$$

(Taylor)

$$\mathrm{V}(\phi^a) + \underbrace{\alpha\, \Delta^a(\phi^a)\, \frac{\partial V}{\partial \phi^a} + \mathcal{O}(\alpha^2)}_{=0} = V(\phi^a)$$

$$\alpha\, \Delta^a(\phi^a)\, \tfrac{\partial V}{\partial \phi^a} + \underbrace{\mathcal{O}(\alpha^2)}_{\approx 0} = 0$$

Diferenciando com respeito a ϕ^b e tomando $\phi^a = \phi_0^a$ e $\phi^b = \phi_0^b$:

$$\alpha \left\{ \left(\frac{\partial \Delta^a(\phi)}{\partial \phi^b}\bigg|_{\phi=\phi_0} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\bigg|_{\phi=\phi_0} \right) + \Delta^a(\phi_0)\, \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\bigg|_{\phi=\phi_0} \right\} = 0$$

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

Como já sabemos:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right|_{\phi^a=\phi_0^a} = 0$$

Resta:

$$\Delta^a(\phi_0)\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\right|_{\phi^a=\phi_0^a,\, \phi^b=\phi_0^b} = 0$$

$$\Delta^a(\phi_0^a)\, m_{ab} = 0$$

IFT - UNESP

Teorema de Goldstone

No caso em que

$$\Delta^a(\phi_0^a) = 0$$

O vácuo é trivialmente invariante à mesma transf. de simetria da lagrangiana:

$$\phi_0^a \rightarrow \phi_0^{a'} = \phi_0^a + \alpha \underbrace{\Delta^a(\phi_0^a)}_{=0} = \phi_0^a$$

Por outro lado, se o vácuo não respeitar a mesma simetria que a lagrangiana:

$$\Delta^a(\phi_0^a) \neq 0$$

Então: $\phi_0^a \rightarrow \phi_0^a + \alpha\, \Delta^a(\phi_0^a) \neq \phi_0^a$, e ϕ_0^a leva à quebra espontânea da simetria.

Teorema de Goldstone

Nesse segundo caso ($\Delta^a(\phi_0^a) \neq 0$), a relação

$$\Delta^a(\phi_0^a)\, m_{ab} = 0$$

Pode ser interpretado como uma equação de autovalor, em que $\Delta^a(\phi_0^a)$ é um autovetor de m_{ab} com autovalor nulo:

$$\Delta^a(\phi_0^a)\, m_{ab} = \lambda\, \Delta^b(\phi_0^a) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

ϕ_0^a não invariante sob sim. de $\mathcal{L} \to$ autovalor nulo pra m_{ab}.

Para "a" geradores quebrados pelo ϕ_0^a, que não respeita as simetrias de $\mathcal{L}$, teremos "a" campos sem massa aparecendo na teoria.

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Teorema de Goldstone

Assim, encerramos nosso seminário com uma demonstração simples do Teorema de Goldstone.

Concluímos que, sempre que uma simetria contínua da Lagrangiana é espontaneamente quebrada pelo estado de vácuo ϕ_0^a, surgem campos sem massa na teoria: os bósons de Goldstone.

Essa é uma consequências importante das simetrias em teorias de campos, com implicações diretas na física de partículas, modelos efetivos e teoria de Higgs.